Игры с кониками

Соглашения и терминология. В этом листке основное поле $\Bbbk$ по умолчанию предполагается алгебраически замкнутым с $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$; желающие могут считать, что $\Bbbk = \mathbb{C}$. Две точки называются *сопряжёнными* относительно гладкой квадрики, если одна из них лежит на поляре другой. Квадрики на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ называются *кониками*, пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ называется *пространством коник*, прямые и плоскости в нём — соответственно, *пучками*[1] и *связками*[2] коник. Две прямые на $\mathbb{P}_2$ называются *сопряжёнными* относительно гладкой коники, если одна из них проходит через полюс другой.

Г10◇1. Напишите явное уравнение[3], задающее пучок коник, проходящих через $a = (1:0:0)$, $b = (0:1:0)$, $c = (0:0:1)$, $d = (1:1:1)$. Сколько в нём вырожденных коник?

Г10◇2. **а)** Могут ли все коники в пучке быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника; может ли в нём быть ровно **б)** 0 **в)** 1 **г)** 2 **д)** 3 **е)** 4 вырожденных коники?

Г10◇3. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по **а)** 1 **б)** 2 **в)** 3 точкам? Если да, приведите соответствующие примеры.

Г10◇4. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

Г10◇5. Прямая $(p,q) \subset \mathbb{P}_n$ пересекает гладкую квадрику $Q \subset \mathbb{P}_n$ в точках r, s. Докажите, что p и q сопряжены относительно Q, если и только если $[p,q,r,s] = -1$.

Г10◇6. Назовём двойным отношением $[a,b,c,d]$ четырёх точек гладкой коники C двойное отношение четырёх прямых $[(pa),(pb),(pc),(pd)]$ в пучке прямых с центром в некоторой пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора p и что две хорды C тогда и только сопряжены относительно C когда их концы гармоничны на C.

Г10◇7. Пусть в условии задачи Г9◇3 точки a,b,c,d лежат на гладкой конике $C \in \mathbb{P}_2$. Покажите, что треугольник xyz автополярен относительно C.

Г10◇8*. Покажите, что два треугольника тогда и только тогда перспективны (см. зад. Г8◇9), когда они полярны друг другу относительно некоторой коники.

Г10◇9. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2), если треугольник $\triangle e_0e_1e_2$
а) вписан в C **б)** описан вокруг C **в)** автополярен относительно C?

Внутренние однородные координаты на гладкой конике. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{P}_2$, параметризующей неупорядоченные пары точек $\{p,q\}$ на $\mathbb{P}_1$, конику Веронезе C, образованную двойными точками $\{p,p\}$, и будем называть *однородными координатами* такой двойной точки на C однородные координаты соответствующей точки p на $\mathbb{P}_1$ (в каком-либо базисе $\mathbb{P}_1$), а *дробно линейным преобразованием* коники C — биекцию $C \xrightarrow{\sim} C$, индуцированную дробно линейным преобразованием однородных координат на C.

Г10◇10. Покажите, что двойное отношение из зад. Г10◇6 есть двойное отношение однородных координат (см. зад. Г9◇1) на C.

Г10◇11 (перекрёстная ось). Рассмотрим дробно линейное преобразование $\varphi : C \longrightarrow C$ гладкой коники C, заданное своим действием на какие-либо три точки $a,b,c \in C$.

а) опишите ГМТ пересечений прямых $(x,\varphi(y)) \cap (y,\varphi(x))$ для всех $x \neq y$ на C

б) одной линейкой укажите (какие-нибудь) точки $p_1, p_2 \in C$ и прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ так, чтобы φ оказалось композицией проекции C на ℓ из p_1, а затем проекции ℓ обратно на C из p_2

в) одной линейкой постройте неподвижные точки φ

г) **(теорема Паскаля)** выведите из предыдущего, что шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$ лежат на конике тогда и только тогда, когда 3 точки пересечения пар «противоположных сторон» образованного ими «шестиугольника» коллинеарны.

[1] пучок (в этом смысле) переводится на английский как *pencil*
[2] связка (в этом смысле) переводится на английский как *net*
[3] т. е. квадратичную форму, коэффициенты которой линейно зависят от двух параметров

Г10◇12 (инволюции на конике). Покажите, что **а)** любая инволюция[4] на конике высекается пучком прямых с центром вне этой коники; **б)** для любых двух различных точек коники существует единственная её инволюция, оставляющая эти точки неподвижными.

Г10◇13. Одной линейкой постройте **а)** пару касательных к данной конике C, проходящих через данную точку $p \notin C$; **б)** касательную к C в данной точке $p \in C$.

Г10◇14. Даны две различных инволюции $\sigma_1, \sigma_2 : C \longrightarrow C$. Сколько существует точек $p \in C$, таких что $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$?

Г10◇15*. Покажите, что две разных инволюции коммутируют, если и только если пары их неподвижных точек гармоничны, а три разных инволюции тогда и только тогда составляют (вместе с Id_C) группу Клейна $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный треугольник.

Г10◇16. Сколько коник касается пяти заданных прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Г10◇17. Для всякого ли проективного изоморфизма $\gamma : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя различными прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ существует коника $C_\gamma \subset \mathbb{P}_2$, касающаяся обеих прямых и высекающая γ своими касательными[5]? Буде такая коника существует, единственна ли она?

Г10◇18 (теорема Брианшона). Покажите, что шесть прямых тогда и только тогда касаются одной коники, когда три «главные диагонали» образованного ими «шестиугольника» пересекаются в одной точке.

Г10◇19* (поризм Понселе для треугольников). Покажите, что два треугольника на $\mathbb{P}_2$ описаны около одной коники тогда и только тогда, когда они вписаны в одну конику.

Г10◇20*. Используя только линейку, постройте треугольник, вписанный в данную гладкую конику C так, что прямые, содержащие его стороны, проходят через 3 заданные точки. Сколько решений может иметь эта задача?

Г10◇21*. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к предыдущей.

Г10◇22* (2-2 соответствия на конике). В условиях зад. Г10◇10 будем называть (*симметричным алгебраическим*) 2-2 *соответствием* на C всякую кривую $\Gamma \subset C \times C$, задаваемую (в однородных координатах на C) уравнением $f(x,y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x_0, x_1, y_0, y_1]$ однороден степени 2 как по $x = (x_0 : x_1)$, так и по $y = (y_0 : y_1)$, и симметричен: $f(x,y) = f(y,x)$. Пары точек $(p,q) \in \Gamma$ называются *соответственными* (или *образом* и *прообразом* друг друга), что записывается как $q \in \Gamma(p)$, $p \in \Gamma^{-1}(q)$. Соответствие называется *невырожденным*, если у каждой точки, лежащей вне некоторого конечного множества, имеется ровно по два различных образа и прообраза. Покажите, что любое симметричное алгебраическое 2-2 соответствие на C

а) либо вырождено, либо имеет не более 4 неподвижных[6] точек

б) является сопряжением относительно некоторой коники[7] C'

в) высекается касательными к некоторой конике[8] C''

Г10◇23*. Опишите все вырожденные 2-2 соответствия.

Г10◇24* (поризм Понселе). Фиксируем натуральное $n \geqslant 3$ и две различных гладких коники C_1 и C_2 на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что если существует n-угольник, одновременно вписанный в C_1 и описанный около C_2, то такой n-угольник можно нарисовать с вершиной в любой точке $p \in C_1$, за исключением, разве что, конечного множества точек, дающих «вырожденные» n-угольники (с меньшим числом сторон и/или с повторяющимися сторонами).

---

[4] *инволюцией* называется нетождественный проективный автоморфизм, обратный самому себе

[5] в том смысле, что $y = \gamma(x) \iff$ прямая (x,y) касается C_γ

[6] т. е. входящих в множество своих (про) образов

[7] т. е. $p, q \in C$ соответственны если и только если они сопряжены относительно C'

[8] т. е. $p, q \in C$ соответственны если и только если прямая (p,q) касается C''