Словарик «Линейная алгебра – Проективная геометрия»

Г8◇1°. Пусть основное поле конечно и состоит из q элементов. Сколько всего имеется k-мерных **а)** аффинных подпространств в $\mathbb{A}^n$? **б)** проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$?

Г8◇2°. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в пространстве V можно выбрать базис так, чтобы каждая прямая ℓ_i была бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\}$?

Г8◇3°. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки $A' = (1 : 0 : 0)$, $B' = (0 : 1 : 0)$ и $C' = (0 : 0 : 1)$ лежали, соответственно, на прямых (BC), (CA) и (AB), а прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекались в точке $(1 : 1 : 1)$.

Г8◇4°. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) \neq 0\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому $\xi \in V^*$, и k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$, ассоциированное с каким-нибудь $(k+1)$-мерным векторным подпространством $W \subset V$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ видимо в U_ξ как k-мерное аффинное подпространство.

Г8◇5°. Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k-мерное аффинное подпространство (где $k < n$ фиксировано). Обязательно ли $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$? Всегда ли существуют аффинные карты, в которых Φ вообще не видно?

Г8◇6°. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

Г8◇7°. Пусть $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ — непересекающиеся подпространства размерностей d_1 и d_2, таких что $d_1 + d_2 = n - 1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

Г8◇8°. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Покажите, что
- **а)** каждое из них является пространством гиперплоскостей в другом;
- **б)** правило $\mathbb{P}(W) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Ann} W)$ устанавливает оборачивающую включение биекцию между k-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-k-1)$ – мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$;
- **в)** с учётом (а) биекция из (б) имеет следующее геометрическое описание: подпространству $H \subset \mathbb{P}_n$ соответствует множество всех содержащих это подпространство гиперплоскостей, причём множество сие есть проективное пространство размерности $n - \dim H - 1$.

Г8◇9° (проективные автоморфизмы). Покажите, что всякий линейный изоморфизм $F : V \longrightarrow V$ корректно задаёт биекцию[1] $\overline{F} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ по правилу $v \mapsto F(v)$, причём биекции $\overline{F}$ и $\overline{G}$, индуцированные двумя линейными изоморфизмами F и G, совпадают тогда и только тогда, когда $F = \lambda \cdot G$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Г8◇10. Нетождественный проективный автоморфизм $\overline{F}$ называется *инволюцией*, если $\overline{F}^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что всякая инволюция на проективной прямой над алгебраически замкнутым полем имеет ровно две различных неподвижных точки.

Г8◇11 (перекрёстная ось[2]). На $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ даны прямые $\ell_1 = \mathbb{P}(U_1)$ и $\ell_2 = \mathbb{P}(U_2)$ и проективный изоморфизм $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$, индуцированный неким линейным изоморфизмом $f : U_1 \longrightarrow U_2$. Опишите ГМТ пересечения прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ независимо пробегают ℓ_1.

Г8◇12 (теорема Дезарга). Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что три точки пересечения пар их соответственных[3] сторон коллинеарны тогда и только тогда, когда три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке[4].

---

[1] такие биекции называются *проективными автоморфизмами*

[2] по-английски *cross-axis*

[3] т. е. поименованных одинаковыми буквами

[4] треугольники, для которых это так, называются *перспективными*