Аффинные и ортогональные преобразования

Г5◇1. Верно ли, что если некоторая группа $\mathfrak{G}$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^n$ имеет конечную орбиту[1], то $\mathfrak{G}$ имеет и неподвижную точку?

Г5◇2 (аффинные преобразования плоскости). Назовём две фигуры *аффинно конгруэнтными*, если они переводятся друг в друга аффинным преобразованием. Верно ли, что:

а) две трапеции аффинно конгруэнтны $\iff$ отношения их оснований равны?

б) два четырёхугольника аффинно конгруэнтны $\iff$ отношения, в которых их соответственные диагонали делятся точкой своего пересечения, равны?

в) пятиугольник аффинно конгруэнтен правильному $\iff$ 4 из его диагоналей параллельны противолежащим им сторонам?

Г5◇3 (движения плоскости). Пусть τ_v, σ_ℓ и $\varrho_{p,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение относительно прямой ℓ и поворот вокруг точки p на угол φ против ЧС. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части, через параметры движений из левой части:
а) $\sigma_{\ell_1}\circ\sigma_{\ell_2} = \varrho_{p,\varphi}$ **б)** $\sigma_{\ell_1}\circ\sigma_{\ell_2} = \tau_v$ **в)** $\tau_u\circ\tau_w = \tau_v$ **г)** $\varrho_{p,\varphi}\circ\varrho_{q,\psi} = \varrho_{r,\vartheta}$ **д)** $\sigma_\ell\circ\varrho_{p,\varphi}\circ\sigma_\ell = \varrho_{q,\psi}$
е) $\varrho_{p,\varphi}\circ\sigma_{\ell_1}\circ\varrho_{p,-\varphi} = \sigma_{\ell_2}$ **ж)** $\varrho_{p,\varphi}\circ\sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_2}$

Г5◇4. Опишите композицию четырёх отражений плоскости относительно последовательных (против ЧС) сторон квадрата.

Г5◇5. Найдите ГМТ x с минимальным расстоянием $|x, f(x)|$, где f — композиция трёх отражений плоскости относительно последовательных (против ЧС) сторон данного треугольника.

Г5◇6 (собственные подобия плоскости). Композиции сдвигов, поворотов и гомотетий аффинной евклидовой плоскости называются её *собственными подобиями*. Покажите, что:
а) группа собственных подобий изоморфна группе всех аффинных преобразований комплексной прямой $\mathbb{A}_1(\mathbb{C})$ **б)** для любых двух пар точек $a \neq b$ и $a' \neq b'$ существует единственное собственное подобие ψ: $\psi(a) = a'$ и $\psi(b) = b'$ **в)** всякое собственное подобие является либо сдвигом либо поворотной гомотетией. **г)** По данным $a \neq b$ и $a' \neq b'$ циркулем и линейкой постройте центр поворотной гомотетии или вектор сдвига из зад. Г5◇6б)

Г5◇7 (движения пространства). Пусть τ_v, σ_π и $\varrho_{v,\varphi}$ обозначают, соответственно, сдвиг на вектор v, отражение в плоскости π и поворот вокруг прямой с направляющим вектором v на угол φ против ЧС, если глядеть вдоль v. Выясните, когда имеют место написанные ниже равенства, и во всех случаях, когда они верны, выразите параметры движения в правой части через параметры движений из левой **а)** $\sigma_{\pi_1}\circ\sigma_{\pi_2} = \varrho_{v,\varphi}$; **б)** $\sigma_{\pi_1}\circ\sigma_{\pi_2} = \tau_v$;
в) $\sigma_\pi\circ\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_\pi = \varrho_{v,\psi}$ **г)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\varrho_{w,\psi} = \tau_v\circ\varrho_{v,\vartheta}$ **д)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_\pi\circ\varrho_{u,-\varphi} = \sigma_{\pi_2}$ **е)** $\varrho_{u,\varphi}\circ\sigma_{\pi_1} = \sigma_{\pi_2}$
ж) $\tau_{u_2}\circ\sigma_{\pi_2}\circ\tau_{u_1}\circ\sigma_{\pi_1} = \tau_v\circ\varrho_{v,\varphi}$, где каждый из сдвигов u_i параллелен соответствующей плоскости отражения π_i, $i = 1, 2$.

Г5◇8. Верно ли, что композиция любого поворота с любым переносом является винтовым движением[2] с тем же углом закрутки, что и исходный поворот?

Г5◇9. Пусть $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — некоторое движение. В обозначениях зад. Г5◇7 опишите движения: **а)** $F\circ\tau_v\circ F^{-1}$ **б)** $F\circ\sigma_\pi\circ F^{-1}$ **в)** $F\circ\varrho_{v,\varphi}\circ F^{-1}$

Г5◇10*. Покажите, что группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ проста[3].

Г5◇11*. Докажите, что группа $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ компактна[4] и линейно связна[5]. Проста ли она?

Г5◇12. Опишите все конечные подгруппы в: **а)** $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ **б)** $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ **в*)** $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ **г*)** $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$

---

[1] *орбитой* точки $x \in X$ относительно группы $\mathfrak{G}$ преобразований множества X называется множество всех точек, которые можно получить из x всевозможными преобразованиями из $\mathfrak{G}$

[2] т. е. композицией поворота с переносом на вектор, параллельный оси поворота

[3] группа $\mathfrak{G}$ называется *простой*, если у неё нет отличных от единицы и всей группы подгрупп $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, таких что $ghg^{-1} \in \mathfrak{H}$ для всех $h \in \mathfrak{H}$ и $g \in \mathfrak{G}$

[4] т. е. ограничена и замкнута в евклидовом пространстве квадратных матриц $\mathbb{R}^{n^2}$

[5] т. е. любые две точки соединяются непрерывной кривой