Векторы, точки и прямые на координатной плоскости

Через $\mathbb{k}^2$ обозначается 2-мерное координатное *векторное* пространство над полем $\mathbb{k}$ (всюду кроме зад. Г1◇4 можно считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{R}$). Все точечные фигуры живут в ассоциированном с $\mathbb{k}^2$ *аффинном* пространстве $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2(\mathbb{k})$. Прямые *определяются* как на лекции, и задачи надо решать исходя именно из этого определения.

Г1◇1. Напишите уравнение прямой в $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$, проходящей: **а)** через точку $(2,-3)$ параллельно вектору $(5,2)$ **б)** через точки $(-3,5)$ и $(4,-1)$ и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями **в)** $3x_1+5x_2=-1$ **г)** $2x_1-3x_2=5$; для каждой из 6 получившихся пар прямых найдите **д)** точку их пересечения **е)** угол между ними **ж)** расстояние от начала координат до каждой из прямых.

Г1◇2 (правило Крамера). В $\mathbb{A}_2$ найдите точку пересечения прямых $a_1x_1+a_2x_2=\alpha$, $b_1x_1+b_2x_2=\beta$ и докажите, что две прямые на $\mathbb{A}_2$ либо совпадают, либо не пересекаются и имеют пропорциональные векторы скорости, либо пересекаются ровно в одной точке.

Г1◇3. Лежат ли на одной прямой в $\mathbb{A}_2$: **а)** середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения боковых сторон произвольного четырёхугольника? **б)** пересечение боковых сторон, пересечение диагоналей и середины оснований произвольной трапеции?

Г1◇4. Сколько прямых имеется на плоскости над конечным полем $\mathbb{k}$, состоящем из q чисел? На плоскости над полем $\mathbb{k}=\mathbb{Z}/(5)$ вычетов по модулю 5 нарисуйте все проходящие через начало координат прямые.

Г1◇5 (центр масс). Даны точки $p_1,p_2,\dots,p_m$ и числа $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m\in\mathbb{k}$ с ненулевой суммой. Покажите, что существует единственная точка c (*центр масс* точек p_i с *весами* μ_i), такая что $\sum\mu_i\cdot\overrightarrow{cp}_i=0$. Для произвольно заданной точки o явно выразите $\overrightarrow{oc}$ через μ_i и $\overrightarrow{op}_i$.

Г1◇6 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют центры масс c_p и c_q соответственно, причём все три суммы $\sum\mu_i$, $\sum\nu_j$ и $\sum\mu_i+\sum\nu_j$ ненулевые. Совпадает ли центр масс объединения этих наборов[1] с центром масс пары точек c_p и c_q, взятых с весами $\sum\mu_i$ и $\sum\nu_j$?

Г1◇7. Нарисуйте все точки $\mathbb{R}^2$, барицентрические координаты[2] (α,β,γ) которых относительно данного $\triangle\,ABC$ удовлетворяют условиям: **а)** $\alpha,\beta,\gamma>0$ **б)** $\alpha,\beta>0$, $\gamma<0$ **в)** $\alpha=\beta$ **г)** $\alpha,\beta>1/3$, $\gamma>0$ **д)** $\alpha\geqslant\beta$ **е)** $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$ и напишите условия на (α,β,γ), задающие: **ж)** 6 треугольников, на которые $\triangle\,ABC$ разрезается медианами **з)** треугольники гомотетичные $\triangle\,ABC$ с коэффициентами 3 и 1/3 относительно точки пересечения медиан.

Г1◇8 (Теорема Чевы). Пусть на прямых BC, AC и AB, соединяющих три неколлинеарных точки A, B, C, отмечены точки $A_1=\alpha_B B+\alpha_C C$, $B_1=\beta_A A+\beta_C C$, $C_1=\gamma_A A+\gamma_B B$. Покажите, что в точки A, B, C можно поместить веса α, β, γ так, чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1, центр тяжести точек B и C — в точке A_1, а центр тяжести точек C и A — в точке B_1, если и только если $\frac{\alpha_B}{\alpha_C}\cdot\frac{\beta_C}{\beta_A}\cdot\frac{\gamma_A}{\gamma_B}=1$. Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения трёх прямых (AA_1), (BB_1), (CC_1) через одну точку.

Г1◇9*. Векторы $v_1,v_2,\dots,v_n\in\mathbb{R}^2$ идут из начала координат O в вершины правильного n-угольника с центром в O, но занумерованы случайно. Может ли удвоенная площадь этого многоугольника оказаться меньше суммы $\det(v_1,v_2)+\det(v_2,v_3)+\;\cdots\;+\det(v_{n-1},v_n)+\det(v_n,v_1)$?

Г1◇10. Точка C' делит делит отрезок AB в отношении $\overrightarrow{C'A}:\overrightarrow{C'B}=\beta:\alpha_c$, а точка B' делит делит отрезок AC в отношении $\overrightarrow{B'A}:\overrightarrow{B'C}=\gamma:\alpha_b$. В каком отношении делятся отрезки BB' и CC' точкой пересечения прямых, на которых они лежат?

Г1◇11*. Точки A', B', C' делят отрезки BC, CA и AB в отношениях $\overrightarrow{A'B}:\overrightarrow{A'C}=\beta_a:\gamma_a$, $\overrightarrow{B'C}:\overrightarrow{B'A}=\gamma_b:\alpha_b$, $\overrightarrow{C'A}:\overrightarrow{C'B}=\alpha_c:\beta_c$ соответственно. Как относится площадь треугольника, образованного прямыми AA', BB' и CC', к площади треугольника ABC?

---

[1] «объединение» совпадающих точек заключается в сложении их весов

[2] напомним, что $\alpha+\beta+\gamma=1$