§10. Проективные квадрики

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

10.1. Квадрики и билинейные формы. Гиперповерхность степени два

$$Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)\,,$$

задаваемая в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ ненулевым однородным квадратичным многочленом $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ относительно какого-нибудь базиса

$$e_0, e_1, \dots, e_n \in V$$

квадратичный многочлен q можно записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x\,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$.

Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма

$$\widetilde{q} : V \times V \xrightarrow{(u,w)\mapsto \widetilde{q}(u,w)} \Bbbk\,,$$

такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2}\sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t y = \\ = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big)\,. \end{aligned} \tag{10-1}$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы $\widetilde{q}$ в базисе $\{e_i\}$:

$$a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)\,.$$

Упражнение 10.1. Проверьте, что в другом базисе

$$(e_0', e_1', \dots, e_n') = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$$

новая матрица Грама A' выражается через A по формуле $A' = {}^tC \cdot A \cdot C$.

10.1.1. Определитель формы. Из упр. 10.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода:

$$\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)\ .$$

Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

10.1.2. Ранг формы. Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы q.

Упражнение 10.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

10.1.3. Проективная эквивалентность квадрик. Две квадрики называются *проективно эквивалентными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства.

Теорема 10.1 (теорема Лагранжа)
Для любой квадрики над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Поскольку $q \not\equiv 0$, найдётся $e \in V$, такой что $q(e) = \widetilde{q}(e,e) \neq 0$. Примем его за первый базисный вектор и обозначим через

$$e^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u,e) = 0 \,\}$$

ортогональное относительно формы $\widetilde{q}$ дополнение к натянутому на e одномерному подпространству $\Bbbk \cdot e$. Так как $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде $\lambda e + u$ с $\lambda = \widetilde{q}(v,e)/\widetilde{q}(e,e)$ и $u = v - \lambda e \in e^{\perp}$, пространство V распадается в ортогональную прямую сумму $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$. Заменим V на $e^{\perp}$. Если $q|_{e^{\perp}} \equiv 0$ искомый базис состоит из e и произвольных базисных векторов пространства $e^{\perp}$. Если $q|_{e^{\perp}} \not\equiv 0$, мы повторяем рассуждение и получаем второй базисный вектор, и т. д. □

Следствие 10.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ произвольная квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $\sum\limits_{i=0}^{r-1} x_i^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i/\sqrt{q(e_i)}$. □

10.1.4. Пример: квадрики на $\mathbb{P}_1$. Согласно теореме Лагранжа произвольная квадратичная форма от двух переменных (над любым полем, в котором $1+1\neq 0$) в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2+ax_1^2=0$ с $a\neq 0$, либо уравнением $x_0^2=0$. В первом случае определитель формы $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a, и форма невырождена. Во втором случае $\det(q)=0$ и форма вырождена.

Вырожденная квадрика $x_0^2=0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы, задающей точку $(0:1)$.

Неособая квадрика $x_0^2+ax_1^2=0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в $\Bbbk$. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-a=\delta^2$, то $x_0^2+ax_1^2=(x_0-\delta x_1)(x_0+\delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta:1)$.

Поскольку $-a$ с точностью до умножения на квадрат совпадает с $-\det(q)$, строение квадрики, задаваемой на $\mathbb{P}_1$ квадратичной формой

$$q(x)=a_0x_0^2+2a_1x_0x_1+a_2x_1^2$$

произвольного вида полностью задаётся классом её *дискриминанта*

$$D/4\overset{\text{def}}{=}-\det(q)=a_1^2-a_0a_2$$

по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, мы имеем двойную точку, если единичный — пару различных точек, в оставшемся случае (возможном лишь над незамкнутым полем) квадрика пуста.

Следствие 10.2

Для пересечения произвольной квадрики Q с произвольной прямой ℓ имеется ровно 4 возможности: или $\ell\subset Q$, или $\ell\cap Q$ есть двойная точка, или $\ell\cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell\cap Q=\varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен. □

10.1.5. Корреляция, ядро и особые точки. Со всякой билинейной формой q на V связан линейный *оператор корреляции* $\widehat{q}:V\longrightarrow V^*$, переводящий вектор $v\in V$ в линейную форму «скалярного умножения» на v:

$$\widehat{q}(v)\;:\;w\longmapsto\widetilde{q}(w,v)\;.$$

Матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $\{e_i\}\subset V$, $\{x_i\}\subset V^*$, совпадает с матрицей Грама A. В частности, q невырождена тогда и только тогда, когда $\widehat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker\widehat{q}=\{\,v\in V\mid\widetilde{q}(w,v)=0\;\;\forall\,w\in V\,\}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim\ker\widehat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат).

Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker\widehat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

Теорема 10.2
Пересечение $Q' = L \cap Q$ с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и Q является *линейным соединением*[1] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker\widehat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\widehat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in \ker\widehat{q} \cap U = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \operatorname{Sing} Q$ и не лежит на квадрике Q, то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, так что $Q \cap \ell$ в этом случае представляет собой двойную точку p. Таким образом, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, либо целиком лежит в $\operatorname{Sing} Q$, либо больше нигде не пересекает квадрику. □

10.1.6. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к Q в p, если ℓ либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается $T_p Q$.

Лемма 10.1
Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики Q, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{q}(a, b) = 0$.

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a, b\}$ вид
$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$
и $\det q|_U = 0 \iff \widetilde{q}(a, b) = \widetilde{q}(b, a) = 0$. □

Следствие 10.3
Видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики[2] Q высекается из квадрики гиперплоскостью $\operatorname{Ann}\widehat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}$.

[1] т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$
[2] т. е. ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных на Q из b

Следствие 10.4
Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ эквиваленты друг другу:

$$1)\ p \in \operatorname{Sing} Q \qquad 2)\ T_pQ = \mathbb{P}(V) \ \text{— это всё пространство}$$

$$3)\ \text{все частные производные } \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0\,.$$

Следствие 10.5
Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1. □

10.2. Проективная двойственность. Проективные пространства

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^{\times} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$$

называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение

$$\langle \xi, v \rangle = 0 \quad \text{на} \quad \xi \in V^*\,,\ v \in V$$

при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^{\times}$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^{\times}$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$.

Проективизируя соответствие $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$ между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^*, мы получаем для каждого $m = 0,\ 1,\ \dots\ ,\ (n-1)$ обращающую включения биекцию между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^{\times}$. Эта биекция называется *проективной двойственностью*. Она переводит проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^{\times} = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^{\times}$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L, и позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, которые могут довольно сильно отличаться от исходных.

Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

10.2.1. Полярное преобразование. Корреляция

$$\widehat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*\,,$$

ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики Q. Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p,x)=0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q.

Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как геометрическое место точек, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\widetilde{q}(a,b)=0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Упражнение 10.3. Рассмотрим полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно границы некоторого круга K. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой (это особенно интересно в случае, когда точка лежит внутри круга, а прямая не пересекает круг).

Предложение 10.1
Пусть $a,b\notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q, когда они гармоничны по отношению к точкам c, d.

Доказательство. Ограничение квадрики Q на прямую $(ab)=(cd)$ задаётся в однородных координатах $(x_0:x_1)$ относительно базиса (c,d) квадратичной формой $q(x)=\det(x,c)\cdot\det(x,d)$, поляризация которой имеет вид

$$\widetilde{q}(x,y)=\frac{1}{2}\big(\det(x,c)\cdot\det(y,d)+\det(y,c)\cdot\det(x,d)\big)\,.$$

Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a,b)=0$ равносильно тому, что

$$\det(a,c)\cdot\det(b,d)=-\det(b,c)\cdot\det(a,d)\,,$$

т. е. равенству $[a,b,c,d]=-1$. □

Предложение 10.2
Для неособой квадрики $G\subset\mathbb{P}_n$ и произвольной квадрики $Q\subset\mathbb{P}_n$ множество гиперплоскостей, полярных точкам $p\in Q$ относительно квадрики G, образуют квадрику в $Q_G^\times\subset\mathbb{P}_n^x$, того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах матрицы Грама A и B соответственно, то квадрика $Q_G^\times$ имеет в двойственных однородных координатах матрицу $B^{-1}AB^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\widehat{q}:\mathbb{P}_n\xrightarrow{\sim}\mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $Q\subset\mathbb{P}_n$ переводит точку со столбцом координат x в точку двойственного пространства со строкой координат $x^t\cdot B$ и является проективным изоморфизмом. Полярные гиперплоскости $\xi=\widehat{q}(p)$ точек $p\in P$ задаются, таким образом, уравнением

$$0=x^t\cdot A\cdot x=\big(\xi\cdot B^{-1}\big)\cdot A\cdot\big(\xi\cdot B^{-1}\big)^t=\xi\cdot B^{-1}AB^{-1}\cdot\xi^t\,,$$

что и утверждалось. □

Следствие 10.6
Касательные пространства к гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют гладкую квадрику $Q^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $B = A$. Тогда гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно квадрики Q — это в точности касательные пространства T_pQ. □

10.2.2. Поляритеты над незамкнутыми полями. Над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Тем не менее, соответствующие таким квадрикам полярные преобразования вполне наблюдаемы геометрически.

Упражнение 10.4. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Лемма 10.2
Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.

Доказательство. Это сразу следует из лем. 9.1. □

Теорема 10.3
Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из лем. 10.2. □

10.3. Пространства квадрик.

10.3. Пространства квадрик. Проективное пространство классов ненулевых квадратичных форм на V с точностью до пропорциональности

$$\mathbb{P}_{\frac{n(n+3)}{2}} = \mathbb{P}\left(S^2V^*\right) \tag{10-2}$$

называется *пространством квадрик*[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$.

[1] над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все точки этого пространства отвечают непустым квадрикам, и разные точки могут задавать одинаковые квадрики (например, пустые), так что правильнее было бы говорить о «пространстве поляритетов», чем о «пространстве квадрик», однако наше название является общепринятым

Упражнение 10.5. Убедитесь, что размерность пространства квадрик на $\mathbb{P}_n$ именно такая как в (10-2).

Пример 10.1 (пространство коник)
Квадрики на $\mathbb{P}_2$ называются *проективными кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые);
- *распавшаяся коника*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка);
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Удобной моделью неособой коники в $\mathbb{P}_2$ является *коника Веронезе* C_2 из прим. 9.4 на стр. 158. Она живёт в пространстве $\mathbb{P}_2$ квадрик на $\mathbb{P}_1$ и состоит из всех вырожденных квадрик

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \ : \quad a_0a_2 - a_1^2 = 0 \right\}. \tag{10-3}$$

Поскольку квадратичная форма $a_0\,x_0^2 + 2a_1\,x_0x_1 + a_2\,x_1^2$ с нулевым дискриминантом является полным квадратом некоторой линейной формы $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1$, коника Веронезе[2] имеет рациональную параметризацию однородными многочленами второй степени:

$$a_0 = \alpha_0^2\,, \quad a_1 = \alpha_0\alpha_1\,, \quad a_2 = \alpha_1^2\,. \tag{10-4}$$

Предложение 10.3
Невырожденная коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени d, не более, чем по $2\,d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Запараметризуем неособую конику однородными полиномами степени 2 от параметра[3] $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения параметра t, в которых коника пересекает кривую с уравнением $f(q) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2\,d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2\,d$ точек пересечения. □

[1] т. е. объединение двух прямых $x_0 = \pm i\,x_1$, пересекающихся в особой точке $(0:0:1)$

[2] а значит — после подходящей линейной замены координат — и любая гладкая коника

[3] например, спроектировав эту конику из лежащей на ней точки на какую-нибудь прямую, как в (прим. 9.5), или приведя её линейной заменой координат к виду (10-3) и воспользовавшись параметризацией (10-4)

Предложение 10.4
Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 10.3. □

Следствие 10.7
Каждые 5 прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2$, лежат на единственной гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

Пример 10.2 (пространство квадрик в $\mathbb{P}_3$)
Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Упражнение 10.6. Покажите, что особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой квадрике.

Над алгебраически замкнутым полем особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ суть:

- *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- *простой конус*[2] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

---

[1] т. е. объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i\, x_1$, или, что то же самое, линейное соединение особой прямой (e_2, e_3) и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой (e_0, e_1)

[2] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в $\mathbb{P}_3$ является *квадрика Сегре* в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right)$, состоящая из ненулевых матриц ранга 1:

$$Q_S \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{10-5}$$

Каждый ненулевой линейный оператор $F : U \longrightarrow V$ ранга 1 имеет одномерный образ, порождённый некоторым ненулевым вектором $v \in V$ и ядро коразмерности 1 в W, имеющее одномерный аннулятор, порождённый некоторым ненулевым ковектором $\xi \in U^*$. Поэтому F пропорционален оператору

$$\xi \otimes v : U \xrightarrow{u \mapsto \langle \xi, u \rangle \cdot v} V\,, \tag{10-6}$$

который называется *тензорным произведением* ковектора $\xi \in U^*$ и вектора $v \in V$. Отметим, что v и ξ определяются по F однозначно с точностью до пропорциональности.

Если $U = V = \Bbbk^2$, и v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, то матрица $F = \xi \otimes v$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{10-7}$$

Таким образом возникает *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3\,, \quad \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)\,,\ \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{End}(\Bbbk^2)\right)$$

переводящее пару $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ в оператор $\xi \otimes v$ с матрицей (10-7). Вложение Сегре биективно отображает $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_S. А именно, координатная прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $(\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $(x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, поскольку всякая прямая, лежащая на Q_S и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_S$ содержится в плоской конике $Q_S \cap T_p Q_S$, которая исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Упражнение 10.7. Покажите, что следующие три свойства оператора

$$F : \Bbbk^2 \longrightarrow \Bbbk^2$$

эквивалентны друг другу: а) $F \in T_{\xi\otimes v}Q_S$ б) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \Bbbk\cdot v$ в) $F = \xi\otimes w + \eta\otimes v$ для некоторых $\eta \in \mathbb{P}_1^\times$, $w \in \mathbb{P}_1$ и что действие ассоциированного с невырожденным оператором $F \in \mathrm{GL}(\Bbbk^2)$ дробно линейного изоморфизма

$$\overline{F} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$$

на произвольную точку $p = \mathrm{Ann}\,(\xi) \in \mathbb{P}_1$ допускает следующее геометрическое описание: проведём в $\mathbb{P}_3$ плоскость π через точку F и отвечающую ξ прямолинейную образующую $L' = \xi \times \mathbb{P}_1$ на квадрике Сегре $Q_S \subset \mathbb{P}_3$; тогда π пересечёт Q_S по распавшейся конике, состоящей из образующей L' и ещё одной образующей L'', лежащей в другом семействе, и имеющей вид $L'' = \mathbb{P}_1 \times v$, где $v = \overline{F}(p)$.

Следствие 10.8
Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. $\square$

Упражнение 10.8. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в*) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г*) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых[1]).

10.4. Подпространства, лежащие на квадриках. Факт наличия двух семейств прямолинейных образующих, заметающих невырожденную квадрику в $\mathbb{P}_3$, распространяется в старшие размерности следующим образом.

Рассмотрим n-мерную гладкую квадрику

$$Q_n = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(V)$$

и лежащее на ней линейное подпространство $L = \mathbb{P}(W)$. Условие $L \subset V(q)$ означает, что $\widehat{q}(W) \subset \mathrm{Ann}\,(W)$. Поскольку форма q невырождена, её корреляция $\widehat{q} : V \longrightarrow V^*$ инъективна. Стало быть,

$$\dim W = \dim \widehat{q}(W) \leqslant \dim \mathrm{Ann}\,(W) = \dim V - \dim W\ ,$$

откуда $\dim(W) \leqslant \dim(V)/2 = \frac{n}{2} + 1$ и $\dim L \leqslant [n/2]$, где $[\,*\,]$ означает целую часть. Мы получаем

[1] Указание: примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

Предложение 10.5
На гладкой проективной квадрике не лежит проективных подпространств размерности большей половины размерности этой квадрики. □

С другой стороны, всякое подпространство $L \subset Q_{n-1}$, проходящее через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, содержится в пересечении $Q_n \cap T_pQ_n$ квадрики с её касательной гиперплоскостью в точке p. Такое пересечение является особой квадрикой в $\mathbb{P}_n = T_pQ_n$ с единственной особой точкой p, т. е. представляет собой конус с вершиной в точке p над неособой квадрикой Q_{n-2}, лежащей в не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_n$. Это вытекает из следующего более общего утверждения:

Предложение 10.6
Сечение неособой квадрики Q произвольной гиперплоскостью Π либо является неособой квадрикой в Π, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$, и в этом случае $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p.

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первое утверждение следует из оценки:

$$\begin{aligned}\dim\ker(\widehat{q}|_W) = \dim\bigl(W \cap \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\bigr) \leqslant \\ \leqslant \dim \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim\operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1\,. \quad (10\text{-}8)\end{aligned}$$

Если ядро ограничения $\widehat{q}|_W$ не нулевое, а одномерное с базисом p, то $p \in Q \cap \Pi$ имеет $\operatorname{Ann}(\widehat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\widehat{q}(p))$, то вектор $p \in \operatorname{Ann}\widehat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\widehat{q}$ на $\operatorname{Ann}\widehat{q}$. □

Следствие 10.9
Множество лежащих на неособой n-мерной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ проективных подпространства максимально возможной размерности $[n/2]$, проходящих через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, биективно соответствует множеству всех $([n/2]-1)$-мерных проективных подпространств, лежащих на неособой $(n-2)$-мерной квадрике $Q_{n-2} \subset \mathbb{P}_{n-1}$.

Доказательство. В самом деле, каждое лежащее на Q_n и проходящее через $p \in Q_n$ проективное подпространство является линейным соединением p с проективным подпространством на единицу меньшей размерности, лежащим на неособой квадрике, высекаемой конусом $Q_n \cap T_pQ_n$ в любой не проходящей через p гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_n$. □

Пример 10.3 (гладкие квадрики над замкнутым полем)
Предыдущее следствие позволяет индуктивно описать семейства линейных подпространств, заметающих неособые квадрики $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем.

На нульмерной и одномерной гладких квадриках $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ и $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ лежат только 0-мерные подпространства.

Следующие две квадрики — двумерная $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ и трёхмерная $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ — не содержат плоскостей. При этом каждая точка $p \in Q_2$ является, как мы знаем, пересечением пары прямых, проходящих через p и две точки неособой квадрики $Q_0 \subset T_pQ_2 \setminus \{p\}$. Аналогичным образом, через каждую точку $p \in Q_3$ проходит одномерное семейство прямых, образующих конус с вершиной p над гладкой коникой $Q_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$. Обратите внимание, что множество всех прямых на Q_3 образует одно связное[1] семейство, а не два, как было на квадрике Сегре.

Далее, гладкая четырёхмерная квадрика $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку $p \in Q_4$ проходят два пучка[2] плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Сегре $Q_2 \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$. Таким образом, на четырёхмерной квадрике мы опять получаем *два несвязных друг с другом* семейства плоскостей максимальной размерности.

Упражнение 10.9. Покажите, что пятимерная квадрика $Q_5 \subset \mathbb{P}_6$ заметается одним связным семейством плоскостей.

[1] в том смысле, что любую прямую на Q_3 можно непрерывно продеформировать по квадрике в любую другую прямую, чего на квадрике Сегре было сделать нельзя (чтобы не вдаваться в дополнительные определения, мы считаем здесь, что $\Bbbk = \mathbb{C}$ и непрерывность понимается в обычном для математического анализа смысле

[2] напомним, что *пучок* в этом контексте означает семейство фигур, образующих *прямую* в подходящем проективном пространстве фигур, ср. с (n° 9.2.2)