§7. Выпуклые многогранники и многогранные конусы

В этом параграфе мы всюду обозначаем через $V \simeq \mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, через V^* — двойственное к V векторное пространство линейных форм $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Мы используем симметричное обозначение

$$\langle \psi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \psi(v) \tag{7-1}$$

для значения ковектора $\psi \in V^*$ на векторе $v \in V$. Мы обозначаем через $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ аффинизацию пространства V, а через $o \in \mathbb{A}^n$ — точку, соответствующую нулевому вектору.

7.1. Выпуклые многогранники. Множество $M \subset \mathbb{A}(V)$ решений конечной системы нестрогих линейных неравенств $\alpha_i(v) \geqslant 0$, где

$$\alpha_i = \psi_i + c_i : \mathbb{A}(V) \xrightarrow{v \mapsto \langle \psi_i, v\rangle + c_i} \mathbb{R}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\,,$$

суть аффинные функционалы с дифференциалами $\psi_i = D_{\alpha_i} \in V^*$ и свободными членами $c_i = \alpha_i(0) \in \mathbb{R}$, называется *выпуклым многогранником* (или *полиэдром*).

Согласно этому определению, пересечение любого конечного множества выпуклых многогранников является выпуклым многогранником.

Всё пространство $\mathbb{A}(V)$ — это выпуклый многогранник, задаваемый неравенством $1 \geqslant 0$, в котором аффинный функционал $\alpha = 1$ тождественно равен единице на всём пространстве $\mathbb{A}(V)$. Пустое множество — это выпуклый многогранник, задаваемый неравенством $-1 \geqslant 0$.

Любое аффинное подпространство $\Pi = p + U$, где $U \subset V$ векторное подпространство, а $p \in \mathbb{A}^n$ — точка, также является выпуклым многогранником, ибо является пересечением аффинных гиперплоскостей, задаваемых линейными (неоднородными) уравнениями $\langle \psi_i, v\rangle = c_i$, где $\psi_i \in V^*$ — порождают векторное подпространство $\operatorname{Ann}(U) \subset V^*$, а $c_i = \psi_i(p) \in \mathbb{R}$, и каждая такая гиперплоскость в свою очередь является пересечением двух замкнутых полупространств, задаваемых неравенствами $\langle \psi_i, v\rangle \geqslant c_i$ и $\langle \psi_i, v\rangle \leqslant c_i$.

Из сказанного следует, что сечение выпуклого многогранника произвольным аффинным подпространством является выпуклым многогранником.

Напомним, что для аффинного функционала $\alpha : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ мы полагаем

$$H_\alpha^+ = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(p) \geqslant 0\}\,,$$
$$H_\alpha = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid \alpha(p) = 0\}\,.$$

Если аффинный функционал $\alpha \equiv c$ является константой, то

$$H_\alpha^+ = \begin{cases} \mathbb{A}(V) & \text{при } c \geqslant 0 \\ \varnothing & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad H_\alpha = \begin{cases} \mathbb{A}(V) & \text{при } c = 0 \\ \varnothing & \text{при } c \neq 0\,. \end{cases}$$

Если α не постоянен и имеет ненулевой дифференциал $D_\alpha = \psi \in V^*$, то H_α^+ — это «настоящее» полупространство с граничной гиперплоскостью H_α коразмерности 1 в $\mathbb{A}(V)$, параллельной векторному подпространству $\operatorname{Ann} D_\alpha \subset V$.

В этих обозначениях выпуклый многогранник есть замкнутая выпуклая фигура вида

$$M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+ ,$$

где A — это конечное множество аффинных функционалов $\alpha : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$.

7.1.1. Грани. Напомним, что *гранью* замкнутого выпуклого множества M называется пересечение M с любым его опорным полупространством. Любой непустой многогранник, отличный от всего пространства, имеет грани, и каждая из них непуста. Весь многогранник может оказаться своею гранью.

Упражнение 7.1. Приведите пример такой ситуации.

Под *размерностью* грани мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Грани, отличные от M называются *собственными*.

Упражнение 7.2. Покажите, что каждая собственная грань имеет размерность, строго меньшую, чем размерность M.

Грани $\Gamma \subset M$ размерности $\dim \Gamma = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Предложение 7.1 (геометрическое описание граней)
Пусть многогранник $M = \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha^+$ задаётся конечным множеством A аффинных функционалов. Для каждого непустого $I \subseteq A$ положим $H_I = \bigcap\limits_{\alpha \in I} H_\alpha$. Для каждой грани $\Gamma \subset M$ положим $A_\Gamma = \{\alpha \in A \mid \Gamma \subseteq H_\alpha\}$ и $H_\Gamma = H_{A_\Gamma}$. Тогда

1) для каждого непустого $I \subset A$ пересечение $\Gamma_I = M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M

2) для каждой грани $\Gamma \subset M$ подмножество $A_\Gamma \subset A$ непусто, и $\Gamma = \Gamma_{A_\Gamma} = M \cap H_\Gamma$

3) точка p грани $\Gamma \subset M$ является внутренней точкой[1] Γ, если и только если $\alpha(p) > 0$ для каждого $\alpha \notin A_\Gamma$.

4) $\dim \Gamma = \dim H_\Gamma$, т. е. H_Γ — это наименьшее аффинное подпространство, содержащее Γ.

Доказательство. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, то аффинный функционал $\alpha_I = \sum\limits_{\alpha \in I} \alpha$ является опорным для M и $\Gamma_I = M \cap H_{\alpha_I}$. Это доказывает первое утверждение.

[1]в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань

Рассмотрим теперь произвольную грань $\Gamma = M \cap H_\eta$, высекаемую некой опорной гиперплоскостью H_η. Для каждого $\psi \in A \smallsetminus A_\Gamma$ найдётся точка $q_\psi \in \Gamma$, такая что $\psi(q_\psi) > 0$. Поэтому все функционалы $\psi \in A \smallsetminus A_\Gamma$ строго положительны в центре тяжести q_Γ точек q_ψ. Из этого вытекает, что $A_\Gamma \neq \varnothing$ — в противном случае все функционалы $\alpha \in A$ строго положительны в q_Γ, а значит, и на некотором кубе с центром в q_Γ, откуда q_Γ — внутренняя точка M. Таким образом, $A_\Gamma \neq \varnothing$ и $\Gamma \subset H_\Gamma \cap M = \Gamma_{A_\Gamma}$, в частности, $H_\Gamma \neq \varnothing$ и $\Gamma_{A_\Gamma} \neq \varnothing$.

Докажем теперь, что для грани Γ_{A_Γ} выполнено третье утверждение предложения. Пусть точка

$$p \in \Gamma_{A_\Gamma} = H_\Gamma \cap M$$

такова, что $\psi(p) > 0$ для любого $\psi \in A \smallsetminus A_\Gamma$. Поскольку эти строгие неравенства выполнены на некоторой кубической окрестности точки p в аффинном пространстве H_Γ, точка p входит в $\Gamma_{A_\Gamma} = H_\Gamma \cap M$ вместе с этой окрестностью. Это, во-первых, означает что p является внутренней точкой грани Γ_{A_Γ}, а во-вторых, — что H_Γ является наименьшим аффинным подпространством, содержащим[1] Γ_{A_Γ}. Это даст (4), как только мы докажем (2) и (3).

С другой стороны, если функционал $\psi \in A$ зануляется в некоторой точке p произвольной грани Γ' и положителен в некоторой другой точке q этой грани, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ': в противном случае продлевая отрезок $[q,p]$ немного за точку p мы получаем в грани Γ' точку, в которой ψ отрицателен. Это доказывает утверждение (3) для грани Γ_{A_Γ}.

Из этого мы заключаем, что построенная в начале доказательства точка

$$q_\Gamma \in \Gamma = M \cap H_\eta$$

является внутренней точкой грани $\Gamma_{A_\Gamma} \supset \Gamma$. Но тогда каждая точка $p \in \Gamma_{A_\Gamma}$ принадлежит Γ: продлевая, как и выше, отрезок $[p, q_\Gamma]$ за точку q_Γ так, чтобы $q_\Gamma \in [p,r] \subset \Gamma_{A_\Gamma}$, из $\eta(q_\Gamma) = 0$, $\eta(p) \geqslant 0$ и $\eta(r) \geqslant 0$ получаем $\eta(r) = \eta(p) = 0$, т. е. $p \in \Gamma$. Итак, $\Gamma_{A_\Gamma} \subset \Gamma$, что доказывает (2), а с ним и (3), и (4). $\square$

Замечание 7.1 На языке формул доказанное предложение означает следующее. Пусть многогранник M задаётся системой неравенств $\alpha(v) \geqslant 0$, $\alpha \in A$. Если в этой системе заменить часть неравенств на равенства, то множество решений полученной системы соотношений будет либо пустым, либо гранью M (возможно, совпадающей с M), причём *все* грани M можно получить таким способом. А именно, для задания грани $\Gamma \subset M$ надо заменить в определяющей M системе на равенства все те неравенства, которые обращаются в равенства при ограничении на грань Γ. Доказательство предл. 7.1 показывает, что такие неравенства обязательно есть, причём если заменить их равенствами, а все остальные неравенства выкинуть, то множество решений полученной системы уравнений будет наименьшим аффинным подпространством, содержащим

[1] подчеркнём, что при $A_\Gamma = A$ это рассуждение тоже работает

грань Γ, а внутренние точки грани Γ будут характеризоваться тем, что все выкинутые неравенства в этих точках строгие.

Следствие 7.1
Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, причём все они также являются выпуклыми многогранниками, и каждая грань любой грани является гранью исходного многогранника. □

Следствие 7.2
Крайними точками произвольного выпуклого многогранника являются его вершины и только они. □

Следствие 7.3
Каждый ограниченный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, причём множество вершин конечно. □

Предложение 7.2
Следующие свойства многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$ эквивалентны друг другу:

1) M не имеет вершин
2) M содержит аффинное подпространство положительной размерности
3) $V = U \oplus W$, где $0 < \dim U < \dim V$, и $M = \mathbb{A}(U) \times M' \subset \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$, где $M' \subset \mathbb{A}(W)$ — выпуклый многогранник и $\dim M' = \dim M - \dim U$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если многогранник M отличен от наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится, то в этом подпространстве у него есть собственная опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim M$. Заменяя M на эту грань и повторяя рассуждение, мы в конце концов получим грань M, совпадающую с наименьшим содержащим её аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то построенная грань — вершина. Если нет, то выполнено (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). Если $M = \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha^+ \supset p + U$, где $U \subset V$ — ненулевое векторное подпространство, то каждый из аффинных функционалов $\alpha = \psi_\alpha + c \in A$ имеет дифференциал $\psi_\alpha \in \operatorname{Ann} U$: иначе $\exists\, u \in U$ с $\psi_\alpha(U) < 0$, и при $t \gg 0$

$$\alpha(p + tu) = t\psi_\alpha(u) + \psi(p) + c_\alpha < 0 \qquad \Rightarrow \qquad p + tu \notin M\,.$$

Выберем дополнительное к U векторное подпространство $W \subset V$. Тогда

$$V = U \oplus W\,, \quad \mathbb{A}(V) = \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$$

и $\forall\, \alpha \in A$ и $\forall\, (u, w) \in \mathbb{A}(U) \times \mathbb{A}(W)$ значение $\alpha(u, w) = \alpha(o, w)$ не зависит от $u \in \mathbb{A}(U)$, т. е. $M = \mathbb{A}(U) \times M'$, где $M' \subset \mathbb{A}(W)$ — многогранник, задаваемый ограничениями неравенств $\alpha(v) \geqslant 0$ на подпространство $\{o\} \times \mathbb{A}(W) \subset \mathbb{A}(V)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Если $M = \mathbb{A}^k \times M'$, где $k \geqslant 1$, то через каждую точку M проходит аффинное подпространство $\mathbb{A}^k$, целиком содержащееся в M, и потому никакая точка M не может быть крайней. $\square$

Предложение 7.3
Пусть многогранник $M = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha^+$ непуст и отличен от наименьшего аффинного пространства, в котором он содержится. Если функционал $\alpha' \in A$ таков, что $H_{\alpha'} \cap M$ не является гипергранью M, то система неравенств $A' = A \smallsetminus \alpha'$ задаёт тот же самый многогранник M.

Доказательство. Перейдём к наименьшему аффинному пространству, содержащему M. Тогда в M имеется точка p, лежащая в M вместе со своею окрестностью в этом пространстве. Если многогранник $M' = \bigcap_{\alpha \in A'} H_\alpha^+$ строго больше M, то найдётся точка $q \in M'$, в которой $\alpha'(q) < 0$. Рассмотрим точку $r = [p, q] \cap H_{\alpha'}$. Поскольку точка p внутренняя для M', точка r тоже внутренняя для M' — гомотетия с центром в q, переводящая p в r, отображает содержащуюся в M' окрестность U_p точки p в содержащуюся в M' окрестность U_r точки r. Пересечение $U_r' = H_{\alpha'} \cap U_r$ является окрестностью точки r в топологии гиперплоскости H_α' и содержится в многограннике M. Поскольку точка r лежит в грани $H_{\alpha'} \cap M$ многогранника M вместе со своей окрестностью в топологии гиперплоскости H_α', размерность $\dim H_{\alpha'} \cap M = \dim H_{\alpha'}$. Таким образом, $H_{\alpha'} \cap M$ является гипергранью многогранника M. $\square$

Следствие 7.4
Если система A задающих M неравенств минимальна в том смысле, что никакое неравенство нельзя исключить из неё без увеличения многогранника, то для каждого $\alpha \in A$ пересечение $H_\alpha \cap M$ является гипергранью M. $\square$

7.2. Выпуклые многогранные конусы. Множество всех неотрицательных линейных комбинаций конечного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ называется *выпуклым многогранным* (или *полиэдральным*) *конусом*, порождённым векторами v_i, и обозначается

$$\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in V \mid \forall i \ \lambda_i \geqslant 0\} \tag{7-2}$$

Упражнение 7.3. Убедитесь, что $\sigma_{v_1, v_2, \dots, v_m}$ является замкнутой выпуклой фигурой в $\mathbb{A}(V)$, содержит нулевую точку $o \in \mathbb{A}(V)$ и вместе с каждой точкой $p \neq o$ содержит замкнутый луч $[o, p)$.

Лемма 7.1
Каждая опорная гиперплоскость любого выпуклого многогранного конуса σ проходит через нуль.

Доказательство. Пусть опорная гиперплоскость H_η проходит через отличную от нуля точку $p \in \partial\sigma$. Если $\eta(o) > 0$, то ограничение опорного функционала η на луч $[o, p) \subset \sigma$ должно менять в точке p знак, что невозможно. $\square$

Следствие 7.5 (лемма Фаркаша)
Если вектор $w \in V$ не лежит в многогранном конусе $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$, то существует *линейный* функционал $\varphi \in V^*$, такой что $\varphi(w) < 0$ и $\forall\, i\ \varphi(v_i) \geqslant 0$.

Доказательство. По теор. 6.4 и лем. 7.1 замкнутый выпуклый конус $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$ является пересечением своих опорных полупространств H_φ^+ с $\varphi \in V^*$. Поэтому $\forall\, w \notin \sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$ $\exists$ опорный $\varphi \in V^* : \sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m} \subseteq H_\varphi^+$ и $w \notin H_\varphi^+$. $\square$

Теорема 7.1 (теорема Фаркаша – Минковского – Вейля)
Фигура $\sigma \subsetneq V$ является выпуклым многогранным конусом, если и только если она является пересечением конечного множества замкнутых полупространств, граничные гиперплоскости которых проходят через нуль.

Доказательство. Пусть выпуклый многогранник $\Phi \subset \mathbb{A}(V)$ является пересечением конечного числа полупространств H_ψ^+ с $\psi \in V^*$. Тогда $o \in \Phi$ и Φ вместе с каждой точкой $p \neq o$ содержит весь замкнутый луч $[o, p)$. Пересечение Φ со стандартным единичным кубом в $\mathbb{A}(V)$ является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 7.3 представляет собою выпуклую оболочку своих вершин — некоего конечного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_m \in \Phi$. Поскольку для любого ненулевого $v \in \Phi$ вектор $v/||v||_{\mathrm{st}} \in \sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$, фигура Φ является конусом, натянутым на ненулевые v_i.

Покажем, что и наоборот, любой полиэдральный конус $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m} \subsetneq V$ является пересечением конечного числа своих опорных полупространств. Линейный функционал $\psi \in V^*$ является опорным для $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ev}_{v_i}(\psi) = \psi(v_i) \geqslant 0$ при $i = 1, 2, \dots, m$. Поэтому множество всех опорных функционалов конуса $\sigma_{v_1,v_2,\dots,v_m}$ есть пересечение конечного числа полупространств $H_{v_i}^+ \subset V^*$. По уже доказанному это пересечение представляет собою выпуклый многогранный конус $\sigma_{\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_N} \subset V^*$, а значит, любое опорное неравенство $\psi(v) \geqslant 0$ является следствием конечного набора неравенств $\psi_\nu(v) \geqslant 0$, отвечающих образующим $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ этого конуса. $\square$

Следствие 7.6 (теорема Минковского – Вейля)
Фигура $M \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ является ограниченным выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда она представляет собою выпуклую оболочку конечного набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(V)$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ была установлена в сл. 7.3. Наоборот, выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)$ любого конечного набора точек содержится в стандартном ε-кубе с центром в нуле и с $\varepsilon = \max\limits_i ||p_i||_{\mathrm{st}}$. Тем самым, она ограничена. Чтобы убедиться в том, что она является многогранником, вложим

$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ в $(n+1)$-мерное аффинное пространство $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1,0) + V$. В $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$ выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ является пересечением гиперплоскости Π с замкнутым многогранным конусом $\sigma_{w_1, w_2, \ldots, w_m}$, порождённым векторами $w_i = (1, p_i) \in \mathbb{R} \oplus V$. По теор. 7.1 этот конус является многогранником, а значит, многогранником является и его гиперплоское сечение. □

7.2.1. Двойственность и грани. Зафиксируем произвольное конечное множество векторов $R \subset V$ и обозначим через $\sigma_R \subset V$ натянутый на них конус. Множество всех опорных функционалов этого конуса обозначается $\sigma_R^\vee \subset V^*$ и представляет собою пересечение конечного числа проходящих через нуль полупространств в двойственном пространстве V^*

$$\sigma_R^\vee = \{\psi \in V^* \mid \forall\, v \in \sigma_R \ \langle \psi, v \rangle \geqslant 0\} = \bigcap_{v \in R} H_v^+ \,.$$

По теор. 7.1 $\sigma_R^\vee$ также является конусом, т. е. имеет вид $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ для некоторого конечного набора ковекторов $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По сл. 7.5 исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall\, \psi \in \sigma_R^\vee \ \langle \psi, v \rangle \geqslant 0\} = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+ = \sigma_{R^\vee}^\vee$$

есть конус, двойственный к $\sigma_R^\vee$. Таким образом, для любого конуса σ имеет место равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$.

Следуя геометрическому описанию граней, данному в в предл. 7.1, свяжем с каждой гранью $\Gamma \subset \sigma_R$ подмножество $R_\Gamma^\vee \subset R^\vee$, состоящее из всех образующих двойственного конуса, аннулирующих грань Γ:

$$R_\Gamma^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in R^\vee \mid \Gamma \subset H_\psi\} = R^\vee \cap \operatorname{Ann} \Gamma \,,$$

а также подпространство, на котором все эти образующие зануляются:

$$H_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\psi \in R_\Gamma^\vee} H_\psi = \operatorname{Ann} R_\Gamma^\vee \,.$$

Следствие 7.7

Каждая грань $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma$ выпуклого полиэдрального конуса $\sigma_R \subset V$ является конусом, натянутым на все лежащие в ней векторы из R, т. е. на множество векторов $R_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} R \cap \Gamma = R \cap (\sigma_R \cap H_\Gamma) = R \cap H_\Gamma$, причём R_Γ линейно порождает линейную оболочку H_Γ грани Γ.

Доказательство. Согласно предл. 7.1, векторное подпространство H_Γ является линейной оболочкой грани Γ, и $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma \supset R_\Gamma$. Остаётся показать, что все векторы из Γ являются неотрицательными линейными комбинациями векторов из R_Γ. Для каждой образующей $v \in R \smallsetminus R_\Gamma$ найдётся функционал $\psi \in R_\Gamma^\vee$

с $\langle \psi, v\rangle > 0$. Поэтому такая образующая v не может входить с положительным коэффициентом в разложение никакого вектора $w \in \Gamma$ по векторам из R, ибо на любом векторе $w \in \Gamma$ все функционалы $\psi \in R_\Gamma^\vee$ зануляются. □

Упражнение 7.4. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R.

Следствие 7.8
Для любого набора векторов R в n-мерном векторном пространстве V имеется оборачивающая включения биекция между k-мерными[1] гранями конуса $\sigma_R \subset V$ и $(n-k)$-мерными гранями двойственного ему конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$. Она задаётся правилом $\Gamma = \sigma_R \cap H_\Gamma = \sigma_{R_\Gamma} \leftrightarrows \sigma_{R_\Gamma^\vee} = \sigma_{R^\vee} \cap \operatorname{Ann} H_\Gamma = \Gamma^\vee$.

Доказательство. По упр. 2.15 линейная оболочка множества ковекторов $R_\Gamma^\vee$ совпадает с двойным аннулятором $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(R_\Gamma^\vee) = \operatorname{Ann} H_\Gamma$ и высекает из двойственного конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ грань $\Gamma^\vee = \operatorname{Ann} H_\Gamma \cap \sigma_{R^\vee} = \sigma_{R_\Gamma^\vee}$, которая по сл. 7.8 является конусом, натянутым на $R_\Gamma^\vee = \operatorname{Ann} H_\Gamma \cap R^\vee = (\operatorname{Ann} H_\Gamma \cap \sigma_{R^\vee}) \cap R^\vee$. □

Замечание 7.2 В сл. 7.8 *не предполагается* равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geqslant 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань o и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Соответственно, двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$ представляет собою полупространство и тоже имеет две грани — n-мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \operatorname{Ann} o = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$, совпадающую с самим этим полупространством, и $(n-1)$-ную грань $\operatorname{Ann} v = H_v$, представляющую собою границу этого полупространства.

Упражнение 7.5. Покажите, что для каждой грани $\Gamma = \sigma_{R_\Gamma}$ конуса σ_R выполняется равенство $\sigma_{R_\Gamma} = \sigma \cap \left(-\sigma_{R_\Gamma^\vee}^\vee\right)$, где под $-\sigma = \{v \mid -v \in \sigma\}$ понимается конус, центрально симметричный конусу σ относительно начала координат.

7.2.2. Асимптотический конус многогранника. Вектор $v \in V$ называется *неограниченным направлением* (или *асимптотическим вектором*) многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$, если M содержит хоть один луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq} = v$. Нулевой вектор также удобно считать асимптотическим, хотя он и не задаёт никакого направления.

Упражнение 7.6. Покажите, что для того, чтобы вектор $v \in V$ был асимптотическим, необходимо и достаточно, чтобы $\forall p \in M \;\; p + v \in M$.

Мы будем называть множество асимптотических векторов многогранник *конусом неограниченных направлений* (или *асимптотическим конусом*) многогранника M и будем обозначать его σ_{M_∞}. Покажем, что σ_{M_∞} действительно является выпуклым многогранным конусом.

[1] k пробегает значения от нуля до $\dim \sigma_R$, и под $\dim \sigma$-мерной гранью многогранного конуса σ здесь и далее понимается сам этот конус

Предложение 7.4
Асимптотический конус σ_{M_∞} многогранника $M = \bigcap\limits_{\alpha\in A} H_\alpha^+$ это выпуклый многогранный конус в V, двойственный к конусу $\sigma_{D_A} \subset V^*$, порождённому дифференциалами D_α всех задающих M функционалов $\alpha \in A$.

Доказательство. Выберем нулевую точку $o \in \mathbb{A}(V)$ в качестве начальной и запишем задающие M функционалы $\alpha \in A$ в виде $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$, где $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$ и $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Если $\psi_\alpha(v) < 0$ для какого-то α, то $\forall\, p \in \mathbb{A}(V)$ при $t \gg 0$ выполняется неравенство

$$\psi_\alpha(p + tv) + c_\alpha = t\psi_\alpha(v) + \psi_\alpha(p) + c_\alpha < 0\,.$$

Поэтому такой вектор v не является асимптотическим. Наоборот, если все $\psi_\alpha(v) \geqslant 0$, то для любой точки p, удовлетворяющей неравенствам $\psi_\alpha(p)+c_\alpha \geqslant 0$, и любого $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\psi_\alpha(p + tv) + c_\alpha = \psi_\alpha(p) + c_\alpha + t\psi_\alpha(v) \geqslant \psi_\alpha(p) + c_\alpha \geqslant 0\,,$$

означающие, что и весь луч $p + tv$, $t \geqslant 0$, лежит в M, как только $p \in M$. □

Упражнение 7.7. Пусть $M = \mathbb{A}^m \times M'$. Покажите, что $\sigma_{M_\infty} = \mathbb{A}^m \times \sigma_{M'_\infty}$.

7.2.3. Аффинный конус над многогранником. Конструкция из доказательства сл. 7.6 имеет смысл для любого, в том числе неограниченного многогранника $M \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$. А именно, рассмотрим $(n+1)$-мерное векторное пространство $\mathbb{R} \oplus V$, вложим $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1,0) + V = \{(1,v) \in \mathbb{R} \oplus V \mid v \in V\}$ и обозначим через

$$\overline{\sigma}_M \subset \mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$$

замыкание объединения всех лучей $[o,q)$ с началом в нулевой точке $o \in \mathbb{A}^{n+1}$ и направляющими точками $q = (1,p) \in M \subset \Pi$. Замкнутая выпуклая фигура $\overline{\sigma}_M$ называется *аффинным конусом* над многогранником $M \subset \mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}^{n+1} \supset \mathbb{A}^n$.

Чтобы убедиться в том, что $\overline{\sigma}_M$ действительно является полиэдральным конусом, зафиксируем в векторном пространстве $W = \mathbb{R} \oplus V$ координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$ так, чтобы $x_1, x_2, \dots, x_n$ были координатами в V, а x_0 была координатой вдоль первого слагаемого суммы $\mathbb{R} \oplus V$, и будем считать, что многогранник $M = \bigcap\limits_{\alpha\in A} H_\alpha^+$ задаётся в $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ системой линейных неравенств

$$\psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha \geqslant 0\,, \tag{7-3}$$

где $\psi_\alpha \in V^*$, $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$, а индекс $\alpha \in A$ нумерует неравенства.

Предложение 7.5
Если M задаётся в $\mathbb{A}(V)$ неоднородными неравенствами (7-3), то $\overline{\sigma}_M$ задаётся в $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$ однородными неравенствами

$$x_0 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha x_0 \geqslant 0\,, \quad \alpha \in A\,. \tag{7-4}$$

Доказательство. Временно обозначим через $K \subset \mathbb{R} \oplus V$ конус, задаваемый неравенствами (7-4), а через $U \subset \mathbb{R} \oplus V$ — его линейную оболочку. Поскольку при ограничении на аффинную гиперплоскость $x_0 = 1$ система неравенств (7-4) превращается в систему (7-3), $K \cap \Pi = M$. В частности, любой луч $[o, q)$ с $q = (1, p) \in M$ лежит в K, так что $\overline{\sigma}_M \subset K$. С другой стороны, любой вектор $w = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K$ с $x_0 \neq 0$ лежит на луче $[o, q)$, проходящем через точку

$$q = w/x_0 = (1,\, x_1/x_0,\, x_2/x_0,\, \dots ,\, x_n/x_0) \in K \cap \Pi = M\,.$$

Так как все внутренние в топологии пространства U точки K имеют $x_0 > 0$ (обязательно убедитесь в этом!), внутренность K содержится в $\overline{\sigma}_M$. Согласно упр. 6.27 на стр. 121, замкнутое выпуклое множество K является замыканием своей внутренности. Поэтому $K = \overline{\sigma}_M$. □

Упражнение 7.8. Покажите, что вершины многогранника M — суть точки пересечения гиперплоскости Π с теми одномерными рёбрами конуса $\overline{\sigma}_M$, которые не параллельны Π.

Предложение 7.6

Асимптотический конус многогранника M является пересечением аффинного конуса над многогранником $M \subset \Pi$ с параллельным аффинной гиперплоскости $\Pi = (1, 0) + V \subset \mathbb{R} \oplus V$ векторным подпространством $V = (0, 0) + V \subset \mathbb{R} \oplus V$:

$$\sigma_{M_\infty} = \overline{\sigma}_M \cap V = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \overline{\sigma}_M \mid x_0 = 0\}\,. \tag{7-5}$$

Доказательство. Согласно предл. 7.5, аффинный конус $\overline{\sigma}_M$ задаётся в $\mathbb{R} \oplus V$ однородными неравенствами $x_0 \geqslant 0$ и $\psi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_\alpha x_0 \geqslant 0$. Его пересечение с подпространством $x_0 = 0$ состоит из векторов $v \in V$, удовлетворяющих однородным неравенствам $\psi_\alpha(v) \geqslant 0$. □

Теорема 7.2 (теорема Моцкина)

Всякий выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{A}(V)$ имеет вид

$$M = \{p + v \mid p \in \operatorname{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)\,,\ v \in \sigma_{M_\infty}\} \tag{7-6}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_m \subset \mathbb{A}(V)$ — некоторое конечное множество точек[1]. Наоборот, фигура $M = \operatorname{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m) + \sigma = \{p + v \mid p \in \operatorname{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)\,,\ v \in \sigma\}$, построенная по произвольным точкам $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}(V)$ и любому конусу $\sigma \subset V$, является выпуклым многогранником с асимптотическим конусом $\sigma_{M_\infty} = \sigma$ и вершинами, составляющими (возможно, пустое) подмножество в $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Многогранник M ограничен, если и только если $\sigma_{M_\infty} = 0$.

[1]если у многогранника нет вершин, то канонически выбрать эти точки нельзя; если же вершины есть, то в качестве $p_1, p_2, \dots, p_m$ можно взять множество вершин многогранника M, см. упр. 7.9 ниже

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{A}(\mathbb{R} \oplus V)$ аффинный конус $\overline{\sigma}_M$ над многогранником $M \subset \Pi = (1, 0) + V$. Он натянут на конечное множество векторов пространства $\mathbb{R} \oplus V$. Обозначим через $v_1, v_2, \ldots, v_k$ те из них, что лежат в гиперплоскости $V \subset \mathbb{R} \oplus V$, а через $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$ — те, что имеют ненулевую координату x_0 и, следовательно, могут быть выбраны так, чтобы $x_0 = 1$, т. е. в виде $q_i = (1, p_i) \in \Pi$, что мы и будем далее предполагать. Тогда $M = \overline{\sigma}_M \cap \Pi$ состоит из всех неотрицательных линейных комбинаций

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_\ell u_\ell \,,$$

имеющих $x_0(w) = 1$. Последнее означает, что $\sum \mu_i = 1$, т. е. что точка

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_\ell u_\ell = (1, p)\,, \quad \text{где} \quad p \in \operatorname{conv}(p_1, p_2, \ldots, p_m)\,.$$

Согласно упр. 7.8 нульмерные грани многогранника $M = \overline{\sigma}_M \cap \Pi$ суть пересечения одномерных граней конуса $\overline{\sigma}_M$, натянутых на векторы u_i, с гиперплоскостью Π. Это доказывает первое утверждение. Второе и третье утверждения вытекают из того, что фигура (7-6) является пересечением гиперплоскости Π с многогранным конусом в пространстве $\mathbb{R} \oplus V$, натянутым на векторы $q_j = (1, p_j)$ и образующие конуса σ. Поэтому M является многогранником, его аффинный конус $\overline{\sigma}_M$ порождается векторами q_j и образующими конуса σ, его асимптотический конус $\sigma_{M_\infty} = \overline{\sigma}_M \cap V = \sigma$, а вершины M суть пересечения Π с непараллельными Π одномерными гранями $\overline{\sigma}_M$. Последние, согласно сл. 7.7, натянуты на некоторые из из образующих $q_j = (1, p_j)$. □

Упражнение 7.9. Покажите, что когда многогранник M не содержит аффинных подпространств положительной размерности, в качестве точек $p_1, p_2, \ldots, p_m$ в разложении (7-6) можно взять множество его вершин.

7.3. Факторизация и двойственность. Каждое векторное подпространство U в векторном пространстве W над произвольным полем $\Bbbk$ задаёт на W отношение эквивалентности, объявляющее векторы $w_1, w_2 \in W$ лежащими в одном классе *по модулю* U, если и только если $w_1 - w_2 \in U$. Иначе можно сказать, что класс эквивалентности данного вектора $w \in W$ представляет собою аффинную плоскость $w + U \subset \mathbb{A}(W)$.

Упражнение 7.10. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и что сложение классов и их умножение на числа $\lambda \in \Bbbk$ по правилам

$$[w_1 + U] + [w_2 + U] \stackrel{\text{def}}{=} (w_1 + w_2) + U \quad \text{и} \quad \lambda \cdot [w + U] \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda w) + U \tag{7-7}$$

корректны[1] у удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства.

Векторное пространство классов эквивалентности $w + U$ с операциями (7-7) называется *фактором* пространства W по подпространству U и обозначается W/U. Нулевым вектором в нём является класс $0 + U = U \subset W$.

[1] т. е. не зависят от выбора представителей w_1, w_2 и w в соответствующих классах

Упражнение 7.11. Проверьте, что отображение факторизации $W \longrightarrow W/U$, переводящее вектор $w \in W$ в класс $w + U \in W/U$, линейно и эпиморфно, а подпространство $U \subset W$ является его ядром.

Из этого упражнения и предл. 2.5 на стр. 38 вытекает, что

$$\dim(W/U) = \dim(W) - \dim(U)\,. \tag{7-8}$$

Пример 7.1 (образ линейного отображения)
Образ $\mathrm{im}\,(F)$ любого линейного отображения $F : W \longrightarrow V$ канонически изоморфен фактор пространству $W/\ker(F)$. Это ещё одна переформулировка[1] того, что $F(w_1) = F(w_2)$ тогда и только тогда, когда $w_1 - w_2 \in \ker(F)$.

Предложение 7.7
Пространство U^*, двойственное к подпространству $U \subset W$, канонически изоморфно фактору пространства W^* по подпространству $\mathrm{Ann}\,U \subset W^*$. Изоморфизм

$$W^*/\mathrm{Ann}\,(U) \xrightarrow{\sim} U^* \;:\; \alpha \mapsto \alpha|_U \tag{7-9}$$

задаётся отображением ограничения $W^* \longrightarrow U^*$, которое сопоставляет линейному функционалу $\alpha : W \longrightarrow \Bbbk$ его ограничение на $U \subset W$.

Доказательство. Отображение $W^* \longrightarrow U^*$, переводящее ковектор $W \xrightarrow{\alpha} \Bbbk$ в его ограничение $\alpha|_U : U \longrightarrow \Bbbk$ линейно и имеет ядром в точности подпространство $\mathrm{Ann}\,(U) \subset W^*$. Поэтому два функционала на W лежат в одном классе по модулю $\mathrm{Ann}\,(U)$ тогда и только тогда, когда их ограничения на подпространство U одинаковы. С другой стороны, любой линейный функционал $\varphi : U \longrightarrow \Bbbk$ является ограничением на U некоторого функционала $\alpha : W \longrightarrow \Bbbk$. Например, можно взять какое-нибудь дополнительное к U подпространство $U' \subset W$, такое что $U \oplus U' = W$, и для каждого $(u, u') \in U \oplus U'$ положить $\alpha(u, u') = \varphi(u)$. □

Предложение 7.8
Пространство $(W/U)^*$ линейных форм на фактор пространстве W/U канонически изоморфно подпространству $\mathrm{Ann}\,(U) \subset W^*$. Изоморфизм

$$\mathrm{Ann}\,(U) \xrightarrow{\sim} (W/U)^* \tag{7-10}$$

сопоставляет линейному функционалу $\alpha : W \longrightarrow \Bbbk$, тождественно равному нулю на подпространстве $U \subset W$, функцию $\overline{\alpha} : W/U \longrightarrow \Bbbk$, заданную правилом $\overline{\alpha}(w + U) = \alpha(w)$.

Доказательство. Поскольку α имеет постоянное значение на каждом аффинном подпространстве $w + U$, функция $\overline{\alpha}$ определена корректно.

Упражнение 7.12. Убедитесь, что она линейна и что отображение (7-10), задаваемое правилом $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ линейно и инъективно.

[1] ср. с n° 2.3 на стр. 37

Поскольку $\dim \mathrm{Ann}\,(U) = \dim(W) - \dim(U) = \dim(W/U)$, отображение (7-10) является изоморфизмом. $\square$

7.3.1. Двойственный оператор. Со всяким линейным отображением

$$F : L_1 \longrightarrow L_2$$

между векторными пространствами над произвольным полем $\Bbbk$ канонически связано двойственное отображение

$$F^* : L_2^* \xrightarrow{\psi \mapsto \psi \circ F} L_1^* \tag{7-11}$$

переводящее линейную форму $\psi : L_2 \longrightarrow \Bbbk$ в линейную форму $F^*\psi = \psi{\circ}F$ на L_2, значение которой на векторе $v \in L_2$ есть $F^*\psi(v) = \psi(Fv)$. В более симметричных обозначениях (7-1) это записывается равенством

$$\langle F^*\psi, v\rangle = \langle \psi, Fv\rangle \qquad \forall\, v \in L_2 \quad \forall\, \psi \in L_1^* \;. \tag{7-12}$$

Упражнение 7.13. Убедитесь, что композиция $F{\circ}\psi$ является линейной формой на L_2 и что отображение F^* линейно.

Из (7-12) немедленно следует, что $\mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,(F^*) = \ker F$ и $\ker(F^*) = \mathrm{Ann}\,\mathrm{im}\,F$. Беря в этих равенствах аннуляторы обеих частей, получаем двойственные равенства

$$\mathrm{im}\,(F^*) = \mathrm{Ann}\,\ker F \quad \text{и} \quad \mathrm{Ann}\,\ker(F^*) = \mathrm{im}\,F\,. \tag{7-13}$$

Сравнивая эти соотношения с изоморфизмом из прим. 7.1 и изоморфизмом (7-10), мы заключаем, что $\mathrm{im}\,F \subset L_1$ и $\mathrm{im}\,(F^*) \subset L_2^*$ являются двойственными друг другу пространствами: $\mathrm{im}\,F = \mathrm{Ann}\,\ker(F^*) = (L_1^*/\ker F^*)^* = (\mathrm{im}\,F^*)^*$. Спаривание между ними задаётся равенством

$$\langle F^*\psi, Fv\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle F^*\psi, v\rangle = \langle \psi, Fv\rangle \tag{7-14}$$

Упражнение 7.14. Убедитесь непосредственно, что эта формула корректна, т. е. не зависит от выбора ковектора $\psi \in L_1^*$ и вектора $v \in L_2$, использованных для записи элементов из $\mathrm{im}\,F^*$ и $\mathrm{im}\,F$ соответственно.

По аналогичным причинам подпространство $\ker F \subset L_1$ двойственно фактор пространству $L_1^*/\mathrm{im}\,(F^*)$, а подпространство $\ker(F^*) \subset L_2^*$ двойственно фактор пространству $L_2/\mathrm{im}\,F$. Спаривания между ними суть обычные спаривания между векторами и ковекторами в L_1 и в L_2 соответственно.

В силу всего сказанного, фактор по образу линейного отображения F называется *коядром* этого отображения и обозначается $\mathrm{coker}\,(F)$. Тем самым,

$$(\ker F)^* = \mathrm{coker}\,(F^*) \quad \text{и} \quad (\mathrm{coker}\,F)^* = \ker(F^*)\,.$$

Упражнение 7.15. Пусть известна матрица F в некоторых базисах пространств L_1 и L_2. Найдите матрицу F^* в двойственных базисах пространств L_2^* и L_1^*.

7.3.2. Двойственное пространство аффинных функционалов. Аффинные функционалы
$$\alpha : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk$$
образуют векторное пространство W размерности $\dim V + 1$, поскольку выбирая в $\mathbb{A}(V)$ начальную точку o, мы можем однозначно представить каждый аффинный функционал α в виде $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$, где $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$, а $c_\alpha = \alpha(o) \in \Bbbk$.

Функционалы, принимающие постоянное значение на всём пространстве $\mathbb{A}(V)$, составляют одномерное векторное подпространство $C \subset W$, которое мы будем называть *прямой констант*. Эту прямую можно иначе описать как множество всех аффинных функционалов с нулевым дифференциалом:
$$C = \{\alpha \in W \mid D_\alpha = 0\}\,.$$
Фактор пространство W/C канонически изоморфно двойственному к V пространству V^*. Изоморфизм $D : W/C \xrightarrow{\sim} V^*$ задаётся сопоставлением аффинному функционалу α его дифференциала D_α.

Двойственное к пространству аффинных функционалов на $\mathbb{A}(V)$ векторное пространство W^* и ассоциированное с ним аффинное пространство $\mathbb{A}(W^*)$ тесно связаны с исходным аффинным пространством $\mathbb{A}(V)$.

Каждая точка $p \in \mathbb{A}(V)$ задаёт ненулевой линейный функционал вычисления
$$\mathrm{ev}_p : W \xrightarrow{\alpha \mapsto \alpha(p)} \Bbbk\,. \qquad (7\text{-}15)$$
Сопоставляя точкам $p \in \mathbb{A}(V)$ их функционалы вычисления $\mathrm{ev}_p \in W^*$, мы получаем вложение
$$\mathrm{Ev} : \mathbb{A}(V) \xhookrightarrow{p \mapsto \mathrm{ev}_p} \mathbb{A}(W^*)\,. \qquad (7\text{-}16)$$

Упражнение 7.16. Убедитесь в том, что разным точкам отвечают разные функционалы вычисления.

Вложение (7-16) *аффинно*, поскольку разность любых двух его значений
$$\mathrm{Ev}(q) - \mathrm{Ev}(p)\ :\ \alpha \mapsto \alpha(q) - \alpha(p) = D_\alpha\left(\overrightarrow{pq}\right) = \mathrm{ev}_{\overrightarrow{pq}}(D_\alpha)$$
представляет собою результат применения к вектору $\overrightarrow{pq} \in V$ *линейного* отображения
$$\mathrm{ev}_v \circ D\ :\ V \xhookrightarrow{v \mapsto \mathrm{ev}_v \circ D} W\,, \qquad (7\text{-}17)$$
сопоставляющего каждому вектору $v \in V$ функционал вычисления значений дифференциалов аффинных функционалов $\alpha \in W$ на этом векторе:
$$\mathrm{ev}_v \circ D\ :\ \left(\mathbb{A}(V) \xrightarrow{\alpha} \Bbbk\right) \longmapsto \mathrm{ev}_v(D_\alpha) = D_\alpha(v) = \alpha(p+v) - \alpha(p)$$
(где справа $p \in \mathbb{A}(V)$ — произвольная точка).

Упражнение 7.17. Убедитесь, что это правило корректно задаёт *линейное вложение* векторного пространства V векторное пространство W^*.

Линейное вложение (7-17) отождествляет векторное пространство V с аннулятором $\operatorname{Ann} C \subset W^*$ прямой констант $C \subset W$. Последний имеет в W^* коразмерность 1 и задаётся одним линейным однородным уравнением

$$V \simeq \operatorname{Ann} C = \{w \in W^* \mid \langle w, 1\rangle = 0\}\,, \tag{7-18}$$

где $\langle w, 1\rangle = w(1)$ есть значение линейной формы $w \in W^*$ на единичном аффинном функционале $1 \in W$. Мы будем называть векторное подпространство (7-18) *гиперплоскостью векторов*, поскольку оно образовано функционалами вычисления дифференциалов аффинных функционалов $\alpha \in W$ на *векторах* пространства V.

Упражнение 7.18. Убедитесь в том, что отображение $D_{\mathrm{Ev}} = \mathrm{ev}_v \circ D$ есть композиция канонического изоморфизма $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ из форм. (2-12) на стр. 40, изоморфизма $D^* : V^{**} \xrightarrow{\sim} (W/C)^*$, двойственного к взятию дифференциала $D : W/C \xrightarrow{\sim} V^*$, и канонического изоморфизма $(W/C)^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ann} C$ из форм. (7-10) на стр. 138.

Аффинное отображение (7-16) вкладывает аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$ в аффинное пространство $\mathbb{A}(W^*)$ в качестве не проходящей через нуль аффинной гиперплоскости, которую мы будем обозначать $\Pi_V \subset \mathbb{A}(W)$ и называть *гиперплоскостью точек*, поскольку она образована функционалами вычисления аффинных функционалов $\alpha \in W$ на точках пространства $\mathbb{A}(V)$. Гиперплоскость точек задаётся в $\mathbb{A}(W^*)$ одним линейным неоднородным уравнением

$$\Pi_V = \{w \in W^* \mid \langle w, 1\rangle = 1\}\,. \tag{7-19}$$

Она *параллельна* гиперплоскости векторов $V \simeq \operatorname{Ann} C \subset W^*$.

7.3.3. Приложения к многогранникам. Вернёмся к полю $\Bbbk = \mathbb{R}$. С любым конечным множеством аффинных функционалов $A \subset W$ связаны:

- конус $\sigma_A \subset W$, порождённый множеством A;
- многогранник $M = M_A = \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha^+ \subset \mathbb{A}(V)$ (возможно, совпадающий со всем пространством $\mathbb{A}(V)$ или пустой);
- множество $\sigma_M = \{\eta \in W \mid M \subset H_\eta^+\}$ всех функционалов, принимающих неотрицательные значения на многограннике M_A.

Упражнение 7.19. Убедитесь в том, что двойственный к σ_A конус $\sigma_A^\vee \subset W^*$

а) пересекает гиперплоскость точек (7-19) по многограннику, который является образом многогранника M при вложении (7-16)

б) пересекает гиперплоскость векторов (7-18) по конусу, который является образом асимптотического конуса многогранника M при вложении (7-17).

Предложение 7.9
Если $M = M_A \neq \varnothing$ и $1 \in A$, то $\sigma_M = \sigma_A$.

Доказательство. Включение $\sigma_A \subset \sigma_M$ очевидно. Докажем, что $\sigma_M \subset \sigma_A$. Пусть $\eta \in W$ не лежит в σ_A. По лемме Фаркаша найдётся $w \in \sigma_A^\vee \subset W^*$, такой что $\langle w, \eta \rangle < 0$. Так как $1 \in A$, возможны два случая: либо $\langle w, 1 \rangle > 0$, либо $\langle w, 1 \rangle = 0$.

В первом случае, деля w на положительную константу $\langle w, 1 \rangle$, мы можем считать его лежащим в гиперплоскости точек (7-19). Тогда $w = \mathrm{ev}_p \in \Pi_V \cap \sigma_A^\vee$ является функционалом вычисления в некоторой точке $p \in M$, и неравенство $\eta(p) = \langle w, \eta \rangle < 0$ означает, что $M \not\subset H_\eta^+$ и $\eta \notin \sigma_M$.

Во втором случае, $w \in V \cap \sigma_A^\vee$ лежит в гиперплоскости векторов и является функционалом вычисления дифференциалов элементов из W на некотором векторе v из асимптотического конуса многогранника M. Поскольку

$$\langle w, \eta \rangle = D_\eta(v) < 0$$

ограничение функционала η на любой луч $p + vt \subset M$ становится при $t \gg 0$ отрицательным. Так что и в этом случае $M \not\subset H_\eta^+$ и $\eta \notin \sigma_M$. □

Упражнение 7.20. Убедитесь, что а) $M = \bigcap\limits_{\eta \in \sigma_M} H_\eta^+$ б) $M = \varnothing \iff \sigma_M = W$ в) $M = \mathbb{A}(V) \iff \sigma_M = C_{\geqslant 0}$ есть луч неотрицательных констант.

Следствие 7.9
Для любого конечного множества $A \subset W$ множество $\sigma_{M_A} \subset W$ является выпуклым многогранным конусом. Если M непуст и отличен от $\mathbb{A}(V)$, конус σ_M порождается функционалами, задающими гиперграни многогранника M, и единичным функционалом 1.

Доказательство. Поскольку присоединение к множеству A единичного функционала никак не влияет на многогранник M, первое утверждение следует прямо из предл. 7.9 и упр. 7.20. Для доказательства второго утверждения сначала выкинем из A все функционалы, не высекающие гиперграней многогранника M (по сл. 7.4 это не изменит M), а затем добавим к A функционал 1 и воспользуемся предл. 7.9. □

7.4. Линейная оптимизация. Задача линейной оптимизации заключается в отыскании минимума заданной однородной линейной формы $\varphi \in V^*$ на данном многограннике $M = \bigcap\limits_{\eta \in \sigma_M} H_\eta^+ \subset \mathbb{A}(V)$, а также точек $p \in M$, в которых он достигается, или в выяснении того, что φ неограничена на M снизу.

Аналогичная задача о максимуме формально сводится к задаче про минимум сменой знака: $\max \varphi = -\min(-\varphi)$.

Зафиксируем начало отсчёта в нуле $o \in \mathbb{A}(V)$ и запишем задающие M функционалы $\alpha \in A \subset W$ в виде $\alpha = \psi_\alpha + c_\alpha$, где $\psi_\alpha = D_\alpha \in V^*$ и $c_\alpha = \alpha(o) \in \mathbb{R}$.

Предложение 7.10
Пусть многогранник $M = \bigcap\limits_{\alpha\in A} H_\alpha^+ \subset \mathbb{A}(V)$ непуст и все задающие его функционалы $\alpha \in A$ имеют ненулевые дифференциалы $\psi_\alpha \in V^*$. Форма $\varphi \in V^*$ ограничена на M снизу тогда и только тогда, когда $\varphi \in \sigma^\vee_{M_\infty}$, т. е. когда

$$\varphi = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha \cdot \psi_\alpha \quad \text{с} y_\alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\,. \tag{7-20}$$

В этом случае

$$\min_{p\in M} \varphi(p) = -\min_y \sum_{\alpha\in A} c_\alpha y_\alpha\,, \tag{7-21}$$

где минимум справа берётся по всем наборам коэффициентов $y_\alpha \geqslant 0$, дающим разложения (7-20). Множество точек $p \in M$, на которых достигается минимум в левой части (7-21), всегда представляет собою некую грань Γ_φ многогранника M, и в каждом разложении (7-20), на котором достигается минимум в правой части (7-21) ненулевые $y_\alpha \neq 0$ могут встретиться только для

$$\alpha \in A_{\Gamma_\varphi} = \{\alpha \in A \mid H_\alpha \supset \Gamma_\varphi\}\,.$$

Доказательство. Положим $A' = A \sqcup \{1\}$. Расширение A до A' не изменяет M. Число $m \in \mathbb{R}$ является нижней границей для φ на многограннике M, если и только если $M \subset H^+_{\varphi-m}$. По предл. 7.9 последнее означает, что $\eta - m \in \sigma_{A'}$, т. е. что существуют неотрицательные числа y_α и z, такие что

$$\varphi - m = z\cdot 1 + \sum_{\alpha\in A} y_\alpha \cdot \alpha = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha\cdot\psi_\alpha + z + \sum_{\alpha\in A} y_\alpha \cdot c_\alpha\,,$$

что доказывает первое утверждение предложения. Для доказательства равенства (7-21) заметим, что любое разложение (7-20) можно переписать в виде

$$\varphi + \sum_{\alpha\in A} y_\alpha\cdot c_\alpha = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha\cdot\alpha\,.$$

Поэтому число $-\sum\limits_{\alpha\in A} y_\alpha\cdot c_\alpha$, полученное по коэффициентам любого разложения (7-20), всегда является нижней границей для φ на M, и максимальная нижняя граница m_* формы φ на M заведомо *не меньше*

$$\max_y\left(-\sum_{\alpha\in A} y_\alpha\cdot c_\alpha\right) = -\min_y \sum_{\alpha\in A} c_\alpha y_\alpha\,. \tag{7-22}$$

С другой стороны, максимальная нижняя граница m_* равна минимуму формы φ на M, и функционал $\varphi - m_*$ является для M опорным. Поэтому множество точек $p \in M$, в которых $\varphi = m_*$, образует грань

$$\Gamma_\varphi = H_{\varphi-m_*} \cap M$$

многогранника M. Так как любой функционал $\alpha \notin A'_{\Gamma_\varphi}$ строго положителен в некоторой точке грани Γ_φ, а $(\varphi - m_*)|_\Gamma \equiv 0$, такой α не может входить с положительным коэффициентом ни в какое разложение

$$\varphi - m_* = z \cdot 1 + \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \cdot \alpha\,. \tag{7-23}$$

В частности, в любом таком разложении $z = 0$, так что минимум m_* функционала φ на M *представляется* в виде

$$m_* = -\sum_{\alpha \in A_{\Gamma_\varphi}} y_\alpha \cdot c_\alpha \quad \text{с} \quad y_\alpha \geqslant 0\,. \tag{7-24}$$

Из этого вытекает, что набор коэффициентов y_α в правой части (7-24), дополненный нулевыми значениями $y_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$, *реализует* максимум (7-22), а значит, и минимум в правой части (7-21). Это доказывает равенство (7-21).

Записывая произвольное разложение $\varphi = \sum\limits_{\alpha \in A} y_\alpha \psi_\alpha$ с $\sum\limits_{\alpha \in A} y_\alpha c_\alpha = -m_*$ в виде (7-23), куда никакой из функционалов $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$ не может входить с положительным коэффициентом, убеждаемся, что $y_\alpha = 0$ при $\alpha \notin A_{\Gamma_\varphi}$. □

Следствие 7.10

Если правая часть (7-21) достигает минимума на наборе y_α с множеством ненулевых компонент $A_\varphi = \{\alpha \in A \mid y_\alpha \neq 0\}$, то минимум в левой части (7-21) достигается на (автоматически непустой) грани $M \cap H_{A_\varphi}$.

Доказательство. Пусть, как и выше, $m_* = \min\limits_{p \in M} \varphi(p) = -\min\limits_{y} \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha y_\alpha$. Из условия вытекает, что $\varphi - m_* = \sum\limits_{\alpha \in A_f} y_\alpha \cdot \alpha$. Если $M \cap H_{A_\varphi} = \varnothing$, то правая часть этого разложения строго положительна на всём многограннике, что невозможно, поскольку левая часть обращается в нуль на грани, где форма φ достигает своего минимального значения m_*. Поэтому $M \cap H_{A_\varphi} \neq \varnothing$ и $0 = \min\limits_M \varphi - m_* = \min\limits_M \sum\limits_{\alpha \in A_f} y_\alpha \cdot \alpha$ достигается в точности на грани $M \cap H_{A_\varphi}$. □