§6. Топологии, метрики, нормы и выпуклость

6.1. Топологические пространства. Многие определения из анализа сохраняют смысл в очень широком контексте, если формулировать их не на языке неравенств между числами, а на языке окрестностей точек и вложенности таковых окрестностей друг в друга. Формализуется это следующим образом.

Определение 6.1 (топология в терминах открытых множеств)
Топологией на множестве X называется набор подмножеств в X, называемых *открытыми*, такой что

1) несобственные подмножества $\varnothing$ и X открыты
2) пересечение любых двух открытых множеств открыто
3) объединение любого множества открытых множеств открыто.

Множество X вместе с некоторой зафиксированной на нём топологией называется *топологическим пространством*. Подмножество $Z = X \smallsetminus U$, дополнительное к открытому подмножеству U топологического пространства X, называется *замкнутым*. Предыдущее опр. 6.1 можно эквивалентным образом переформулировать в терминах свойств замкнутых подмножеств.

Определение 6.2 (топология в терминах замкнутых множеств)
Топологией на множестве X называется набор подмножеств в X, называемых *замкнутыми*, такой что

1) несобственные подмножества $\varnothing$ и X замкнуты
2) объединение любых двух замкнутых множеств замкнуто
3) пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто

В этой ситуации *открытыми* подмножествами называются дополнения до замкнутых подмножеств.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что опр. 6.2 и опр. 6.1 и в самом деле эквивалентны друг другу.

Пример 6.1 (дискретная топология)
Если объявить *каждое* подмножество $Y \subset X$ одновременно и открытым и замкнутым, то получится топология, называемая *дискретной*.

Пример 6.2 (тривиальная топология)
Если объявить открытыми ровно два подмножества[1]: $\varnothing$ и X, то получится топология, которая называется *тривиальной* (или *антидискретной*).

[1]которые автоматически окажутся и единственными двумя замкнутыми подмножествами

Пример 6.3 (финитные и счётно-финитные топологии)
Если кроме $\varnothing$ и X объявить замкнутыми все конечные (соотв. все конечные или счётные) подмножества $Z \subset X$, то получится топология, которая называется *финитной* (соотв. *счётно-финитной*).

Упражнение 6.2. Убедитесь, что это действительно топологии.

Пример 6.4 (топология Зарисского)
Пусть $X = \mathbb{A}^n(\mathbb{k})$ — аффинное координатное пространство над произвольным полем $\mathbb{k}$. Назовём подмножество $Z \subset \mathbb{A}^n$ замкнутым, если оно является множеством решений некоторой (возможно, бесконечной) системы полиномиальных уравнений.

Упражнение 6.3. Покажите, что $\varnothing$ и всё пространство $\mathbb{A}^n$ задаются уравнениями $1 = 0$ и $0 = 0$ соответственно, объединение множества решений системы уравнений $\{f_\nu(x) = 0\}$ и множества решений системы уравнений $\{g_\mu(x) = 0\}$ задаётся системой уравнений $\{f_\nu(x) \cdot g_\mu(x) = 0\}$ (первый множитель пробегает первую систему, второй — вторую), пересечение решений любого множества систем полиномиальных уравнений задаётся системой уравнений, полученной объединением всех этих систем в одну систему.

Описанная только что топология называется *топологией Зарисского*. Отметим, что на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ топология Зарисского совпадает с финитной топологией из прим. 6.3.

Пример 6.5 (стандартная топология на $\mathbb{R}^n$)
Назовём стандартным *ε-кубом* с центром в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и рёбрами длины 2ε, идущими вдоль стандартных координатных осей:

$$B_\varepsilon(p) \overset{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_i - p_i| \leq \varepsilon \;\forall\, i\} \quad (\text{где } \varepsilon > 0)\,. \tag{6-1}$$

Скажем, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и некоторый ε-куб $B_\varepsilon(p)$ с центром в p.

Упражнение 6.4. Докажите, что получится топология.

Эта топология называется *стандартной топологией* на $\mathbb{R}^n$, или *топологией покоординатной сходимости* (этимология последнего названия прояснится ниже в упр. 6.15 и сл. 6.2).

Упражнение 6.5. Убедитесь, что стандартная топология не зависит от выбора аффинной системы координат[1] в $\mathbb{R}^n$.

[1] т. е. если определить ε-кубы при помощи любой другой аффинной системы координат, то получится тот же самый набор открытых множеств

Пример 6.6 (индуцированная топология)
На любом подмножестве Y топологического пространства X имеется *индуцированная* с X топология, открытыми (соотв. замкнутыми) подмножествами в которой являются пересечения с Y открытых (соотв. замкнутых) подмножеств из X.

Упражнение 6.6. Убедитесь, что это действительно топология.

Определение 6.3
Говорят, что топология на X, заданная набором открытых множеств $\mathscr{U}_1$, *сильнее* (или *тоньше*) топологии, заданной набором открытых множеств $\mathscr{U}_2$, если $\mathscr{U}_1 \supset \mathscr{U}_2$, т. е. если каждое открытое подмножество топологии $\mathscr{U}_2$ открыто и в топологии $\mathscr{U}_1$. В этой ситуации также говорят, что топология $\mathscr{U}_2$ *слабее* (или *грубее*) топологии $\mathscr{U}_1$.

Упражнение 6.7. Покажите, что опр. 6.3 является отношением частичного порядка на множестве всех топологий на данном множестве X, причём дискретная и тривиальная топологии из прим. 6.1 и прим. 6.2 суть абсолютно максимальный (тончайший) и абсолютно минимальный (грубейший) элементы ЧУМа топологий.

Предостережение 6.1 Из определения топологии *не следует*, что одноточечные подмножества $x \in X$ в абстрактном топологическом пространстве X являются замкнутыми. Соответственно, дополнения до точек $X \setminus x$ не обязательно являются открытыми.

6.1.1. Окрестности. Всякое множество W топологического пространства X, содержащее данную точку $p \in X$ вместе с некоторым непустым открытым подмножеством U, содержащим p и содержащимся в W, называется *окрестностью* точки p.

Упражнение 6.8. Покажите, что пересечение двух и объединение любого числа окрестностей данной точки p также являются окрестностями точки p.

Предложение 6.1
Множество открыто тогда и только тогда, оно содержит вместе с каждой своей точкой и некоторую её окрестность.

Доказательство. Непустое открытое множество U само и является содержащейся в U окрестностью любой своей точки. Наоборот, если множество Y содержит вместе с каждой своей точкой p некоторую её окрестность W, то беря в W непустое открытое подмножество U_p, такое что $p \in U_p \subset W \subset Y$, заключаем что $Y = \bigcup\limits_p U_p$ является объединением открытых множеств и посему тоже открыто. □

6.1.2. Базы. Любую топологию на множестве X можно описывать в духе прим. 6.5, *определяя* открытые множества как всевозможные объединения некоторых *базисных* открытых окрестностей — аналогов ε-кубов из прим. 6.5.

Определение 6.4
Подмножество $\mathscr{B}$ в множестве всех открытых множеств данной топологии на X называется *базой* этой топологии, если любая окрестность W любой точки p содержит какое-нибудь содержащее p подмножество $U \in \mathscr{B}$.

Иначе можно сказать, что набор $\mathscr{B}$ открытых множеств данной топологии является её базой, если и только если любое открытое множество является объединением некоторого семейства множеств из набора $\mathscr{B}$.

Упражнение 6.9. Покажите, что счётное множество *открытых ε-кубов*

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_i - p_i| < \varepsilon\ \forall\, i\}$$

с $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и $p \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ образует базу стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$.

Предложение 6.2
Набор подмножеств $\mathscr{B}$ множества X тогда и только тогда является базой некоторой топологии на X, когда для любых двух множеств $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ и любой точки $p \in U_1 \cap U_2$ найдётся $W \in \mathscr{B}$, такое что $p \in W \subset U_1 \cap U_2$.

Доказательство. Если $\mathscr{B}$ — база топологии, то открытое в этой топологии подмножество $U_1 \cap U_2$ содержит вместе с каждой своей точкой p и некоторое содержащее p базовое открытое подмножество $W \in \mathscr{B}$.

Наоборот, если набор открытых множеств $\mathscr{B}$ таков, что

$$\forall\, U_1, U_2 \in \mathscr{B} \quad \text{и} \quad \forall\, p \in U_1 \cap U_2 \quad \exists\, W_p \in \mathscr{B} \,:\, p \in W_p \subset U_1 \cap U_2\,, \tag{6-2}$$

то назовём открытыми в X пустое подмножество $\varnothing$, всё X и всевозможные объединения множеств из $\mathscr{B}$. Очевидно, что объединение любого множества открытых множеств открыто. Пересечение $U' \cap U''$ двух открытых множеств

$$U' = \bigcup_\nu U'_\nu \quad \text{и} \quad U'' = \bigcup_\mu U''_\nu\,, \quad \text{где } U'_\nu, U''_\mu \in \mathscr{B}\,,$$

является объединением всевозможных множеств вида $U'_\nu \cap U''_\mu$, каждое из которых, в свою очередь, является объединением подмножеств $W_p \in \mathscr{B}$, приходящих из всевозможных точек $p \in U'_\nu \cap U''_\mu$ согласно свойству (6-2). Таким образом, $U' \cap U''$ также открыто, и мы задали на X топологию, для которой $\mathscr{B}$ очевидно является базой. □

Упражнение 6.10*. Покажите, что базу топологии Зарисского из прим. 6.4 составляют открытые подмножества вида $\mathscr{D}_f = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) \neq 0\}$, где $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — произвольный многочлен, причём любое открытое множество $U \subset \mathbb{A}^n$ является объединением *конечного* числа базовых.

6.1.3. Непрерывность. Отображение топологических пространств

$$f : X \longrightarrow Y$$

называется *непрерывным*, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого подмножества $U \subset Y$ открыт в X. Это определение согласуется с принятым в анализе: непрерывность f означает, что для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $W \subset Y$ точки $y = f(x)$ найдётся окрестность $U \subset X$ точки x, такая что $f(U) \subset W$.

Упражнение 6.11. Убедитесь в этом и покажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

6.1.4. Зоология точек. Условимся называть произвольные подмножества топологического пространства X *фигурами* в этом пространстве.

Точки фигуры Φ, содержащиеся в Φ вместе с некоторой своею окрестностью, называются *внутренними* точками фигуры Φ. Множество всех внутренних точек фигуры Φ обозначается $\mathring{\Phi}$ и называется *внутренностью* фигуры Φ. Согласно предл. 6.1 внутренность любой фигуры открыта.

Упражнение 6.12. Покажите, что $\mathring{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X, содержащихся в Φ, и является, таким образом, наибольшим по включению открытым подмножеством в X, содержащимся в Φ.

Внутренние точки дополнения $X \smallsetminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры Φ. Иными словами, точка $p \in X$ является внешней для Φ, если у неё есть окрестность $W \ni p$, не пересекающаяся с Φ. Мы будем обозначать множество внешних точек фигуры Φ через $\breve{\Phi}$. Как и внутренность $\mathring{\Phi}$, внешность $\breve{\Phi}$ любой фигуры Φ открыта.

Упражнение 6.13. Покажите, что $\breve{\Phi}$ представляет собою объединение всех открытых подмножеств пространства X, не пересекающихся с Φ, и является, таким образом, наибольшим по включению открытым подмножеством в X, не пересекающим Φ.

Отметим, что множество внешних точек замкнутой фигуры $\Phi \subset X$ — это в точности открытое дополнение $X \smallsetminus \Phi$ к этой фигуре.

Замкнутое подмножество в X, дополнительное к (открытому) множеству внешних точек фигуры $\Phi \subset X$, называется *замыканием* фигуры Φ и обозначается $\overline{\Phi} = X \smallsetminus \breve{\Phi}$. Согласно упр. 6.13 замыкание $\overline{\Phi}$ представляет собою пересечение всех содержащих Φ замкнутых подмножеств пространства X и, тем самым, является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ. В частности, $\overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi}$ для любой фигуры $\Phi \subset X$.

Точки пространства X, не являющиеся ни внешними, ни внутренними точками фигуры $\Phi \subset X$, называются *граничными* или *собственными граничными* точками Φ, смотря по тому, принадлежат ли они этой фигуре. Иначе говоря, точка $p \in X$ является граничной для Φ, если любая её окрестность содержит как точки из Φ, так и точки, не принадлежащие Φ. Множество всех граничных точек Φ обозначается $\partial\Phi$ и называется *границей* фигуры Φ.

Упражнение 6.14. Покажите, что замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою дизъюнктное объединение фигуры Φ и множества всех её несобственных граничных точек.

Точка $p \in X$ называется *предельной точкой* фигуры $\Phi \subset X$, если в любой окрестности точки p имеется отличная от p точка фигуры Φ. Таким образом, замыкание $\overline{\Phi}$ фигуры Φ представляет собою (вообще говоря, недизъюнктное) объединение Φ и множества всех её граничных точек.

Точки фигуры Φ, не являющиеся её предельными точками, называются *изолированными* точками фигуры Φ. Иначе говоря, точка $p \in \Phi$ является изолированной, если у неё есть окрестность, не содержащая никаких точек Φ, кроме самой точки p.

6.1.5. Компактные пространства. Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Предложение 6.3
Если пространство X компактно, и отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно, то пространство $f(X) \subset Y$ компактно в индуцированной с Y топологии.

Доказательство. Рассмотрим произвольное покрытие $f(X) = \bigcup\limits_{\alpha}(f(X) \cap U_\alpha)$, где $U_\alpha \subset Y$ открыты. Открытые множества $f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ покрывают пространство X. Из них можно выбрать конечное подпокрытие

$$X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n)\,.$$

Множества $f(X) \cap U_i$ с $1 \leqslant i \leqslant n$ образуют конечное покрытие $f(X)$. □

Предложение 6.4
Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любой набор его замкнутых подмножеств, в котором каждый конечный поднабор имеет непустое пересечение, и весь имеет непустое пересечение.

Доказательство. Пусть X компактно, и любой конечный набор в семействе замкнутых подмножеств $Z_\alpha \subset X$ имеет непустое пересечение. Если $\bigcap\limits_{\alpha} Z_\alpha = \varnothing$, то открытые подмножества $U_\alpha = X \smallsetminus Z_\alpha$ покрывают X. Выберем среди них конечное покрытие $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n = X$. Тогда $Z_1 \cap Z_2 \cap \ldots \cap Z_n = \varnothing$, что невозможно.

Наоборот, пусть выполнено второе условие. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$. Если никакой конечный набор $U_1, U_2, \ldots, U_n$ элементов этого покрытия не покрывает X, то в семействе дополнительных замкнутых множеств $Z_\alpha = X \smallsetminus U_\alpha$ любой конечный поднабор $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ имеет непустое пересечение. Поэтому $\bigcap\limits_{\alpha} Z_\alpha \neq \varnothing$, а значит $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \neq X$. □

Предложение 6.5 (лемма Больцано–Вейерштрасса)
Любое бесконечное подмножество компактного пространства имеет в нём хоть одну предельную точку.

Доказательство. Если точка $p \in X$ не является предельной для подмножества $\varPhi \subset X$, то у неё есть открытая окрестность U_p, не содержащая никаких точек из $\varPhi$, кроме p. Если ни одна точка в X не является предельной для $\varPhi$, открытые множества U_p покрывают X. Выбирая из них конечное покрытие, заключаем, что множество $\varPhi$ конечно. □

6.1.6. Некоторые предостережения насчёт сходимости. Как и в анализе, точка p топологического пространства X называется *пределом* последовательности[1]

$$x : \mathbb{N} \xrightarrow{n \mapsto x_n} X\,,$$

если любая окрестность точки p содержит все члены последовательности, начиная с некоторого.

Упражнение 6.15. Покажите, что сходимость в стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ из прим. 6.5 равносильна покоординатной сходимости, т. е. последовательность $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ сходится к точке $p \in \mathbb{R}^n$, если и только если при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ последовательность i-тых координат точек последовательности x сходится в $\mathbb{R}$ к i-той координате точки p.

Говоря о сходимости, следует иметь в виду, что свойства сходящихся последовательностей существенно зависят от используемой топологии и могут быть весьма далеки от известных из анализа теорем о пределах последовательностей вещественных чисел в стандартной топологии. Например, в финитной топологии на $\mathbb{R}$ из прим. 6.3 последовательность $x_n = n$ сходится, причём *каждая* точка $p \in \mathbb{R}$ является для неё пределом.

Точка p называется *предельной точкой последовательности* $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, если в любой её окрестности содержится бесконечно много членов последовательности. Предельные точки *последовательности* не следует путать с предельными точками *множества значений* этой последовательности. Так, последовательность вещественных чисел $s_n = (-1)^n$ имеет в стандартной топологии ровно две предельные точки, а множество её значений вообще не имеет предельных точек.

Отметим, что в абстрактном топологическом пространстве из того, что точка p является предельной точкой последовательности x_n, не вытекает, вообще говоря, что в этой последовательности имеется подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$, для которой p является *пределом*.

[1] напомним, что *последовательностью* элементов множества X называется любое отображение $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, и значение этого отображения на числе $n \in \mathbb{N}$ традиционно записывается как $x_n \overset{\text{def}}{=} x(n)$

6.2. Метрические пространства. Имеется важный класс топологических пространств, сходимость в которых устроена практически также, как сходимость в стандартной топологии вещественной прямой $\mathbb{R}$. Эти пространства описываются при помощи следующей конструкции, обобщающей прим. 6.5.

Определение 6.5
Множество X, на котором задана вещественнозначная функция от двух аргументов $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, обладающая $\forall\, x, y, z \in X$ свойствами

$$\begin{array}{ll} \varrho(x,y) = \varrho(y,x) & \text{(симметричность)} \\ \varrho(x,y) \geqslant 0 & \text{(положительность)} \\ \varrho(x,y) = 0 \iff x = y & \text{(невырожденность)} \\ \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z) & \text{(неравенство треугольника)} \end{array}$$

называется *метрическим пространством*, а функция ϱ называется *метрикой* (или *расстоянием*) на X.

6.2.1. Метрическая топология. В метрическом пространстве X фигура

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p,q) \leqslant \varepsilon\} \quad (\text{где } \varepsilon > 0) \tag{6-3}$$

называется (замкнутым) *ε-шаром* с центром в точке $p \in X$. Из неравенства треугольника вытекает, что *открытые ε-шары*

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p,q) < \varepsilon\} \tag{6-4}$$

с положительными $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ составляют базу топологии. В самом деле, если

$$p \in \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_2}(q_2)\,,$$

то для любого $\delta < \min\left(\varepsilon_1 - \varrho(p,q_1)\,,\, \varepsilon_2 - \varrho(p,q_2)\right)$ и любого x с $\varrho(x,p) < \delta$ имеем при $i = 1,2$ неравенства $\varrho(x,q_i) \leqslant \varrho(x,p) + \varrho(p,q_i) < \varepsilon_i - \varrho(p,q_i) + \varrho(p,q_i) = \varepsilon_i$, означающие, что $\overset{\circ}{B}_\delta(p) \subset \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_1}(q_1) \cap \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_2}(q_2)$.

Топология с базой из открытых шаров (6-4) рационального радиуса называется *метрической топологией* на метрическом пространстве X. Открытыми в метрической топологии являются такие подмножества $U \subset X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый ε-шар с центром в этой точке.

Пример 6.7 (евклидова метрика)
С каждым скалярным произведением (v,w) на $\mathbb{R}^n$ связана *евклидова метрика*, расстояние в которой задаётся евклидовой длиной вектора:

$$\varrho_{\text{euc}}(p,q) = |\overrightarrow{pq}| = \sqrt{(q-p,q-p)}\,.$$

Симметричность, положительность и невырожденность этой метрики следуют из симметричности и положительности скалярного произведения. Неравенство треугольника менее очевидно и вытекает из неравенства Коши – Буняковского – Шварца (см. сл. 1.3 на стр. 21). В евклидовой метрике ε-шары — это обычные шары радиуса ε.

Пример 6.8 (sup-метрика в $\mathbb{R}^n$)
Определим на $\mathbb{R}^n$ расстояние между точками как максимум модулей разностей их координат:

$$\varrho_{\sup}(p,q) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |p_i - q_i| \,.$$

Симметричность, положительность и невырожденность такой метрики очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неравенства треугольника на евклидовой прямой: поскольку $|z_i - x_i| \leqslant |z_i - y_i| + |y_i - x_i|$ при каждом i,

$$\varrho_{\sup}(x,z) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i - x_i| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\big(|z_i - y_i| + |y_i - x_i|\big) \leqslant \\ \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i - y_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i - x_i| = \varrho_{\sup}(x,z) + \varrho_{\sup}(x,z)$$

Отметим, что ε-шарами в полученной метрике являются в точности стандартные ε-кубы из прим. 6.5.

Пример 6.9 (sup-метрика в $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$)
Этот пример является бесконечномерным обобщением предыдущего. Определим в пространстве $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$ непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ метрику формулой

$$\varrho_{\sup}(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

(корректной, т. к. любая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего максимального значения). Симметричность, положительность, невырожденность и неравенство треугольника проверяются дословно так же, как и в предыдущем примере. ε-шарами этой метрики являются множества функций, график которых отличается от графика функции, являющейся центром шара, не более, чем на ε.

6.2.2. Отделимость. Из неравенства треугольника вытекает, что любые две различные точки метрического пространства обладают непересекающимися открытыми окрестностями: если $\varrho(p,q) = d$, то

$$\mathring{B}_\varepsilon(p) \cap \mathring{B}_\varepsilon(q) = \varnothing \quad \text{при } \varepsilon < d/2\,.$$

Топологические пространства с таким свойством называются *хаусдорфовыми*. Таким образом, каждое метрическое пространство хаусдорфово.

Упражнение 6.16. Покажите, что в хаусдорфовом пространстве никакая последовательность не может иметь более одного предела.

В силу неравенства треугольника никакой шар радиуса $\varepsilon < d/2$ не может содержать одновременно две точки p и q с $\varrho(p,q) = d > 0$. Поэтому в любом метрическом пространстве пересечение любой последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров

$$B_{\varepsilon_1}(p_1) \supset B_{\varepsilon_2}(p_2) \supset B_{\varepsilon_3}(p_3) \supset \cdots \qquad \text{с } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{6-5}$$

либо пусто, либо состоит из одной точки. В частности, пересечение последовательности шаров $B_{1/n}(p)$ состоит из единственной точки p.

Упражнение 6.17. Покажите, что в метрической топологии все шары $B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid \varrho(p,q) \leqslant \varepsilon\}$ и все точки замкнуты.

Определение 6.6

Метрическое пространство называется *полным*, если каждая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение (автоматически состоящее из единственной точки).

Упражнение 6.18. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ с sup-метрикой из прим. 6.8 полно.

Упражнение 6.19* (по анализу). Покажите, что пространство $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$ непрерывных функций $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ из прим. 6.9 полно.

Теорема 6.1 (свойства метрических компактов)

Следующие свойства фигуры Φ в полном метрическом пространстве X эквивалентны друг другу:

1) из любого покрытия Φ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие

2) любое бесконечное подмножество в Φ имеет в Φ хотя бы одну предельную точку

3) Φ замкнута и для любого $\varepsilon > 0$ фигуру Φ можно покрыть конечным множеством ε-шаров.

Доказательство. В предл. 6.5 мы видели, что импликация (1) $\Rightarrow$ (2) выполняется в любом топологическом пространстве.

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть точка p является предельной для Φ. Начав с любой точки $x_1 \in \Phi$, для каждого натурального $n \geqslant 2$ отметим в шаре радиуса $\varrho(p, x_{n-1})/2$ с центром в p какую-нибудь отличную от p точку $x_n \in \Phi$.

Упражнение 6.20. Проверьте, что во всём объемлющем метрическом пространстве точка p — это единственная предельная точка множества точек $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Согласно (2), $p \in \Phi$, т. е. фигура Φ замкнута. Если для какого-то $\varepsilon > 0$ фигура Φ не покрывается конечным числом ε-шаров, то, начав с любого $y_1 \in \Phi$ и отметив для каждого натурального $k \geqslant 2$ какую-нибудь точку

$$y_k \in \Phi \smallsetminus \big(B_\varepsilon(y_1) \cup B_\varepsilon(y_2) \cup \ldots \cup B_\varepsilon(y_{k-1})\big),$$

получим счётное множество точек $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, в котором $\forall\ n \neq m\ \varrho(y_n, y_m) > \varepsilon$. Поскольку ни в каком шаре радиуса $\varepsilon/3$ не содержится более одной точки y_i, у построенного множества вообще нет предельных точек, что противоречит (2). Следовательно, фигура Φ вполне ограничена.

Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть открытое покрытие $\Phi = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ не содержит конечного подпокрытия. Выберем в конечном покрытии фигуры Φ шарами радиуса $1/4$ такой шар A_1, что пересечение $\Phi \cap A_1 \neq \varnothing$ не накрывается никаким конечным набором множеств U_α. Далее для каждого натурального $n \geqslant 2$ выберем в конечном покрытии Φ шарами радиуса $1/4^n$ такой шар A_n, что пересечение $A_n \cap (\Phi \cap A_{n-1}) \neq \varnothing$ не накрывается никаким конечным набором множеств U_α. Отметим, что $A_n \cap A_{n-1} \neq \varnothing$, и радиус A_n вчетверо меньше, чем у A_{n-1}. Обозначим через D_n шар с тем же центром, что и A_n, но с вдвое большим радиусом $2/4^n$.

Упражнение 6.21. Убедитесь, что $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$ и радиусы шаров D_n стремятся к нулю при $n \to \infty$.

В силу полноты объемлющего пространства все шары D_n имеют общую точку q. Поскольку любой из стягивающихся к q шаров D_n имеет непустое пересечение с Φ, точка q лежит в $\overline{\Phi} = \Phi$ и накрывается некоторым открытым множеством U из набора U_α. Но тогда все шары A_k, начиная с некоторого, лежат внутри U, а значит, $\Phi \cap A_k$ покрывается *одним* множеством U, что противоречит выбору шаров A_k. □

Замечание 6.1 Свойство (1) из теор. 6.1 называется *компактностью*, свойство (2) — *секвенционной компактностью* (или *свойством Больцано – Вейерштрасса*), последнее свойство в (3) называется *вполне ограниченностью*. Из вполне ограниченности следует ограниченность в обычном смысле: если фигура покрывается конечным набором шаров, то она содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с sup-метрикой из прим. 6.8 верно и обратное: всякая ограниченная фигура вполне ограничена, поскольку если Φ содержится в кубе со стороной d, то деля его координатными гиперплоскостями на N^n кубиков со стороной $d/N < \varepsilon$, получаем покрытие Φ конечным набором ε-кубов. Однако в более сложных пространствах встречаются ограниченные, но не вполне ограниченные фигуры.

Упражнение 6.22. Убедитесь, что $\Phi = \{\varphi \in \mathscr{C}^0\big([a,b]\big) \mid \ \forall x \in [a,b]\ \ |\varphi(x)| \leqslant 1\}$ ограничена, но не вполне ограничена в пространстве $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$.

Следствие 6.1

Каждая непрерывная функция $f : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ на компактной фигуре Φ в полном метрическом пространстве X достигает на ней максимального и минимального значения.

Доказательство. Согласно предл. 6.3 образ $f(\Phi) \subset \mathbb{R}$ компактен, в частности, ограничен и замкнут. Из ограниченности вытекает, что у $f(\Phi)$ есть конечные точная верхняя и точная нижняя грани. Из замкнутости $f(\Phi)$ вытекает, что точная верхняя и точная нижняя грани $f(\Phi)$ принадлежат $f(\Phi)$. $\square$

6.3. Нормы. В вещественной аффинной геометрии важную роль играют метрики, инвариантные относительно параллельных переносов и однородные по отношению к гомотетиям. Первое означает, что $\varrho(x, y) = \varrho(\overrightarrow{xy})$ зависит только от *вектора* $\overrightarrow{xy}$, а не от самих точек x и y. Второе означает, что для любых вектора v и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\varrho(\lambda v) = |\lambda| \varrho(v)$.

Определение 6.7

Функция на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$, сопоставляющая вектору $v \in V$ число $||v|| \in \mathbb{R}$, называется *нормой* на V, если $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall\, v, w \in V$ выполнены свойства

$$\begin{array}{ll} ||v|| \geqslant 0 & \text{(положительность)} \\ ||v|| = 0 \iff v = 0 & \text{(невырожденность)} \\ ||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v|| & \text{(однородность)} \\ ||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w|| & \text{(неравенство треугольника)} \end{array}$$

Таким образом, всякая инвариантная относительно сдвигов и однородная относительно гомотетий метрика на вещественном аффинном пространстве над векторным пространством V имеет вид $\varrho(x, y) = ||\overrightarrow{xy}||$ для некоторой нормы $v \mapsto ||v||$ на V.

Например, евклидова метрика из прим. 6.7 получается из *евклидовой нормы*

$$|v| = \sqrt{(v, v)}\,,$$

а sup-метрика из прим. 6.8 — из sup-*нормы*

$$||(x_1, x_2, \dots, x_n)||_{\text{st}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|\,, \tag{6-6}$$

которую мы далее будем называть *стандартной нормой* на $\mathbb{R}^n$.

6.3.1. Евклидовы нормы. Норма $v \mapsto ||v||$ на вещественном векторном пространстве V называется *евклидовой*, если $||v|| = \sqrt{(v, v)}$ для некоторой евклидовой структуры (v, w) на V.

Отметим, что стандартная норма (6-6) не является евклидовой. В самом деле, стандартная норма всех сторон и всех диагоналей квадрата, натянутого на стандартные базисные орты в $\mathbb{R}^2$, равна 1. Между тем для евклидовых норм имеет место

Предложение 6.6
Норма $v \mapsto ||v||$ евклидова, если и только если для неё выполняется *тождество параллелограмма*[1].

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2\left(||v||^2 + ||w||^2\right) . \tag{6-7}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, заметим, что для любой нормы $v \mapsto ||v||$ на $\mathbb{R}^n$ функция $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная правилом $(v,w) \stackrel{\text{def}}{=} \left(||v+w|| - ||v-w||\right)/4$ симметрична, невырождена и положительна. Очевидно также, что $(-v,w) = -(v,w) = (v,-w)\ \forall\, v,w \in V$.

Упражнение 6.23. Покажите, что если норма удовлетворяет тождеству (6-7), то

$$(v_1+v_2,w) = (v_1,w) + (v_2,w) \quad \text{и} \quad (v,w_1+w_2) = (v,w_1) + (v,w_2) .$$

Из упр. 6.23 вытекает, что $(n\cdot v,w) = n\cdot(v,w)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$ и всех $v,w\in V$. Полагая $u = n\cdot v$, заключаем, что $(\frac{1}{n}\cdot u,w) = \frac{1}{n}\cdot(u,w)$, откуда

$$(\lambda v,w) = \lambda(V,w) = (v,\lambda w) \quad \forall\, v,w\in V \quad \text{и} \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{Q} .$$

С учётом упр. 6.23 это означает билинейность произведения (v,w) по отношению к линейным комбинациям с рациональными коэффициентами. Для доказательства билинейности по отношению к любым вещественным линейным комбинациям требуется

Лемма 6.1
Любая норма $v\mapsto ||v||$ на $\mathbb{R}^n$ непрерывна в стандартной топологии.

Доказательство. Обозначим через $e_i\in\mathbb{R}^n$ стандартные базисные векторы и положим $M = \max\limits_i ||e_i||$. Тогда для любого $v\in\mathbb{R}^n$

$$||v|| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \leqslant \sum |x_i|\cdot||e_i|| \leqslant nM\max_i|x_i| = nM\cdot||v||_{\text{st}} .$$

Поэтому для каждого $\varepsilon>0$ при $||v-w||_{\text{st}} < \delta = \varepsilon/2nM$ выполняется неравенство $\big|\, ||v|| - ||w||\, \big| \leqslant ||v-w|| < nM\cdot||v-w||_{\text{st}} < \varepsilon$. □

Из леммы вытекает, что при фиксированных v, $w\in\mathbb{R}^n$ обе части равенства $(\lambda v,w) = \lambda\,(v,w)$ непрерывны как функции $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ от аргумента $\lambda\in\mathbb{R}$.

Упражнение 6.24. Докажите это.

Коль скоро они совпадают на всюду плотном подмножестве[2] $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, то они совпадают всюду. □

[1] утверждающее, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон

[2] подмножество топологического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством

6.3.2. Топологическая эквивалентность норм. Будем называть две нормы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ *топологически эквивалентными*, если индуцированные ими метрики на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ задают одну и ту же метрическую топологию на этом пространстве.

Упражнение 6.25. Покажите, что для топологической эквивалентности двух различных норм $v \mapsto ||v||_1$ и $v \mapsto ||v||_2$ необходимо и достаточно, чтобы в каждом открытом шаре $\{v \in V : ||v||_1 < \varepsilon\}$ первой нормы содержался некоторый открытый шар $\{v \in V : ||v||_2 < \delta\}$ второй и наоборот.

Теорема 6.2
Любая норма на $\mathbb{R}^n$ топологически эквивалентна стандартной sup-норме (6-6).

Доказательство. Согласно упр. 6.25, достаточно показать, что для любой нормы $v \mapsto ||v||$ на $\mathbb{R}^n$ можно подобрать вещественные положительные константы μ и M так, чтобы для всех $v \in \mathbb{R}^n$ выполнялись неравенства

$$\mu \cdot ||v||_{\mathrm{st}} \leqslant ||v|| \leqslant M \cdot ||v||_{\mathrm{st}} \tag{6-8}$$

(в этом случае стандартный ε-куб с центром в произвольной точке $p \in \mathbb{R}^n$ будет содержать внутри себя ε/M-шар нормы $v \mapsto ||v||$ и, наоборот, каждый ε-шар этой нормы будет содержать внутри себя стандартный ε/μ-куб).

Граница $K = \{v \in \mathbb{R}^n : ||v||_{\mathrm{st}} = 1\}$ стандартного 1-куба с центром в нуле компактна (в стандартной топологии), и непрерывная согласно лем. 6.1 функция $v \mapsto ||v||$ достигает на ней своих максимального и минимального значений $M = \sup\limits_{v \in K} ||v||$ и $\mu = \inf\limits_{v \in K} ||v||$. Заметим, что $\mu > 0$, поскольку иначе существовала бы сходящаяся в K последовательность $v_k \in K$ с $||v_k|| \to 0$, что в силу непрерывности функции $v \mapsto ||v||$ и невырожденности нормы означало бы равенство $\lim\limits_{k \to \infty} v_k = 0 \in K$, что не так. Следовательно, для всех $w \in K$ мы имеем неравенства $0 < \mu \leqslant ||w|| \leqslant M < \infty$. Подставляя в них $w = v/||v||_{\mathrm{st}}$ получаем для любого $v \neq 0$ требуемые неравенства (6-8). □

Следствие 6.2
Сходимость в метрической топологии, заданной на $\mathbb{R}^n$ при помощи произвольной нормы, означает покоординатную сходимость в какой-нибудь (а следовательно и в любой) системе аффинных координат.

6.4. Выпуклость. В аффинном пространстве над полем $\mathbb{R}$ барицентрическая комбинация точек $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m$ (где $\sum x_i = 1$) называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geqslant 0$. Фигура Φ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек.

Упражнение 6.26. Покажите, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками p, q она содержала и соединяющий их *отрезок* $[p, q] = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu > 0\}$.

Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ, называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv}(\Phi)$. Иначе $\operatorname{conv}(\Phi)$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ.

Внутренность и замыкание любого выпуклого множества также выпуклы.

Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε-кубами $B_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε-кубами (см. рис. 6◇1).

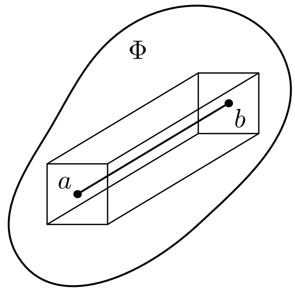

Рис. 6◇1. Внутренность выпуклой фигуры выпукла.

Второе вытекает из того, что для

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k \quad \text{и} \quad b = \lim_{k\to\infty} b_k$$

и любых фиксированных λ, μ мы имеем $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a + \mu b$, так что любая точка отрезка $[a, b]$ также является пределом последовательности точек фигуры Φ, если таковы были a и b.

Пример 6.10 (симплексы)

Выпуклая оболочка $k+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_k$, не лежащих ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости, называется k-мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} x_i p_i \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\,,\ x_i \geqslant 0 \Big\}. \tag{6-9}$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно.

В аффинных координатах $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с началом в p_0 относительно базиса $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, $i = 1,\, 2,\, \dots\,,\, n$, симплекс (6-9) задаётся системой из $(n+1)$ линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ \dots\dots \\ x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \ \cdots\ + x_n \leqslant 1\,. \end{cases} \tag{6-10}$$

т. е. является пересечением $(n+1)$ полупространств.

Упражнение 6.27. Проверьте, что симплекс $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ имеет непустую внутренность, а его граница является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1},\, p_{\nu_2},\, \dots,\, p_{\nu_m}]$ с $m < n$ и $\nu_i \in \{0,\, 1,\, \dots,\, n\}$.

Пример 6.11 (геометрическое описание норм)
Поскольку все нормы на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же топологию, для любой нормы $v \mapsto ||v||$ её единичный шар с центром в нуле

$$B_1(0) = \{v \in V : ||v|| \leqslant 1\} \tag{6-11}$$

ограничен, замкнут и содержит нуль в качестве внутренней точки.

Из однородности нормы вытекает, что этот шар центрально симметричен относительно нуля, а из неравенства треугольника — что он выпуклый: для любых v, w с $||v||, ||w|| \leqslant 1$ и любых $\lambda, \mu > 0$ с $\lambda + \mu = 1$ имеем

$$||\lambda v + \mu w|| \leqslant \lambda ||v|| + \mu ||w|| \leqslant 1\,.$$

Норма $v \mapsto ||v||$ однозначно восстанавливается по единичному шару (6-11) как

$$||v|| = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid \lambda^{-1} v \in B_1(0))\,. \tag{6-12}$$

Предложение 6.7
Формулы (6-11) и (6-12) устанавливают биекцию между нормами на $\mathbb{R}^n$ и выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^n$, содержащими нуль в качестве внутренней точки и центрально симметричными относительно нуля.

Доказательство. С учётом сказанного выше, нам остаётся только проверить, что функция $v \mapsto ||v||_{\Phi} = \inf(\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid v \in \lambda\Phi)$, построенная по любому выпуклому компакту Φ, удовлетворяющему условию теоремы, является нормой на $\mathbb{R}^n$. Положительность, невырожденность и однородность этой функции достаточно проверить при $n = 1$, где они очевидны. Неравенство треугольника следует из выпуклости: $\forall\, v, w \in V$ точка

$$q = \frac{v + w}{||v||_{\Phi} + ||w||_{\Phi}} = \frac{||v||_{\Phi}}{||v||_{\Phi} + ||w||_{\Phi}} \cdot \frac{v}{||v||_{\Phi}} \;+\; \frac{||w||_{\Phi}}{||v||_{\Phi} + ||w||_{\Phi}} \cdot \frac{w}{||w||_{\Phi}}$$

является выпуклой барицентрической комбинацией лежащих в Φ точек $v/||v||_{\Phi}$ и $w/||w||_{\Phi}$. Поэтому $q \in \Phi$, т. е. $||q||_{\Phi} \leqslant 1$ и $||v + w||_{\Phi} \leqslant ||v||_{\Phi} + ||w||_{\Phi}$. □

6.4.1. Аффинные функционалы. Рассмотрим аффинное пространство

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$$

над n-мерным векторным пространством $V \simeq \mathbb{R}^n$. Будем называть *аффинным функционалом* на $\mathbb{A}^n$ аффинное отображение $\xi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. В аффинной системе координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с центром в какой-нибудь точке $p \in \mathbb{A}^n$ аффинный функционал имеет вид

$$\xi(x) = \alpha(x) + \beta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta\,,$$

где $\alpha = D_{\xi} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in V^*$ — линейная форма на V, а $\beta = \xi(p) \in \mathbb{R}$ — некоторое число.

Ограничение любого аффинного функционала $\xi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ на произвольный отрезок $[a, b] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию»

$$\xi(x) = \alpha x + \beta$$

на этом отрезке. Очевидно, что для такой функции имеются следующие исключающие друг друга возможности:

- ξ тождественно обращается в нуль
- ξ вообще не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак
- ξ обращается в нуль ровно в одной точке $x_0 \in [a, b]$, и в этом случае имеется дальнейшая альтернатива:
  - x_0 является одним из концов и ξ имеет постоянный знак на полуинтервале $[a, b] \smallsetminus x_0$
  - $a < x_0 < b$ и ξ имеет постоянный знак на каждом из полуинтервалов $[a, x_0)$ и $(x_0, b]$, причём эти знаки противоположны[1]

Из этого вытекает, что с каждым непостоянным аффинным функционалом $\xi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ связано разбиение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости

$$H_\xi = \{p \in \mathbb{A}^n \mid \xi(p) = 0\},$$

где ξ обращается в нуль, и двух выпуклых *открытых полупространств*

$$\overset{\circ}{H}{}^{+}_{\xi} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) > 0\} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{H}{}^{-}_{\xi} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) < 0\} \tag{6-13}$$

с общей границей $\partial \overset{\circ}{H}{}^{+}_{\xi} = \partial \overset{\circ}{H}{}^{-}_{\xi} = H_\xi$. При этом любой отрезок с концами в разных открытых полупространствах пересекает границу H_ξ в единственной точке, которая является внутренней точкой этого отрезка. Замыканиями открытых полупространств (6-13) являются *замкнутые полупространства*

$$H^{+}_{\xi} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad H^{-}_{\xi} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \xi(p) \leqslant 0\}. \tag{6-14}$$

Это замкнутые выпуклые множества с общей границей $\partial H^{+}_{\xi} = \partial H^{-}_{\xi} = H_\xi$, и открытые полупространства (6-13) являются в точности их внутренностями.

Предложение 6.8

Для любого открытого выпуклого множества U и любой точки $p \notin U$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ размерности $n \geqslant 2$ существует проходящая через p прямая, не пересекающая U.

[1] в частности, значения ξ на концах отрезка отличны от нуля и противоположны по знаку

Доказательство. Обозначим через $C \subset \mathbb{A}^n$ объединение всех пересекающих U открытых[1] лучей с началом в p. Из рис. 6◇2 – рис. 6◇3 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой. Кроме того, $p \in \partial C$, и из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо вообще не пересекает C, либо пересекает так, что все точки ℓ по одну сторону от p являются внутренними точками C, а по другую сторону — внешними точками C (см. рис. 6◇2).

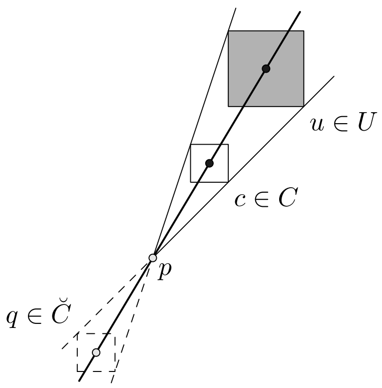

Рис. 6◇2. Открытость C и непустота $\check{C}$.

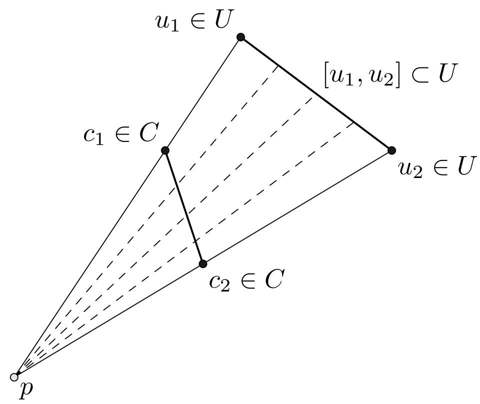

Рис. 6◇3. Выпуклость C.

В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку $n > 1$ через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp). На ней будет точка $r \in \partial C$. Прямая (pr) не пересекает $C \supset U$, т. к. содержит граничную для C точку $r \neq p$. □

Следствие 6.3

Если аффинная плоскость π (возможно нульмерная) не пересекает открытое выпуклое множество U, то она содержится в некоторой не пересекающей U гиперплоскости коразмерности 1.

Доказательство. Поместим начало координат внутрь π и отождествим π с векторным подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$ (возможно нулевым). В множестве всех векторных подпространств $H \subset \mathbb{R}^n$, содержащих W и не пересекающих U, рассмотрим какое-нибудь максимальное по включению подпространство H. Выберем любое дополнительное к H подпространство H': $H \oplus H' = \mathbb{R}^n$ и покажем, что $\dim H' = 1$. Для этого спроектируем $\mathbb{R}^n$ на H' вдоль H. Поскольку отрезки спроектируются в отрезки, а кубы — в кубы, U спроектируется в открытое выпуклое множество, не содержащее нуля, т. к. $H \cap U = \varnothing$. Если $\dim H' > 1$, то по предл. 6.8 в H' найдётся одномерное подпространство L, не пересекающее проекцию U. Тогда $H \oplus L$ не пересекает U и строго больше, чем H, что противоречит выбору H. □

[1] т. е. с выколотым началом

Определение 6.8 (опорные гиперплоскости)
Гиперплоскость H_ξ называется *опорной гиперплоскостью* фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, если $\Phi \subset H_\xi^+$ и $H_\xi \cap \partial\Phi \neq \varnothing$.

Теорема 6.3
Через каждую граничную точку p любого выпуклого множества Φ можно провести опорную гиперплоскость.

Доказательство. Если $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ целиком содержится в какой-нибудь гиперплоскости, то она и будет опорной. Если в Φ есть $(n+1)$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то по упр. 6.27 внутренность $\mathring{\Phi} \neq \varnothing$. Проведём через p гиперплоскость H_ξ, не пересекающую $\mathring{\Phi}$. Функционал ξ имеет на $\mathring{\Phi}$ постоянный знак (в противном случае соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_\xi \cap \Phi$). Меняя, если нужно, знак у ξ, мы можем считать, что $\mathring{\Phi} \subset H_\xi^+$. Замыкание внутренности $\mathring{\Phi}$ лежит в замкнутом полупространстве H_ξ^+, а Φ лежит в замыкании $\mathring{\Phi}$. □

Теорема 6.4
Всякое замкнутое выпуклое множество Z является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z, мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z. Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \mathring{Z}$ и проведём опорное полупространство H_ξ^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $\xi(p) > 0$ и $\xi(r) = 0$ следует, что $\xi(q) < 0$, т. е. $q \notin H_\xi^+$. □

6.4.2. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ. Всякая грань тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n. Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в индуцированной топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с *произвольными* выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры  (гладкое сопряжение отрезков с овалами) имеются одномерные грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью для Φ.

Точки, которые возникают как последние нульмерные элементы во всевозможных цепочках вида: фигура Φ, грань фигуры Φ, грань грани фигуры Φ, грань грани грани фигуры Φ, ... называются *крайними точками* замкнутой выпуклой фигуры Φ. Точка $p \in \Phi$ является крайней тогда и только тогда, когда она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком содержащегося в Φ. В самом деле, точка, не лежащая внутри никакого отрезка из Φ, не может быть внутренней ни для Φ, ни для грани Φ, ни для грани грани Φ и т. д. пока размерность грани больше нуля. Наоборот, если p является внутренней точкой содержащегося в Φ отрезка, то p лежит на грани, если и только если оба конца этого отрезка также лежат на той же грани (иначе высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным). Поэтому точка p не может сама оказаться нульмерной гранью ни у Φ, ни у грани Φ, ни у грани грани Φ и т. д.

Упражнение 6.28. Покажите, что крайние точки любой грани замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ (в частности, все вершины являются крайними точками), и приведите пример фигуры, имеющей крайние точки, отличные от вершин.

Предложение 6.9
Всякая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности. Любая внутренняя точка $p \in \mathring{\Phi}$ является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого фигурой Φ на любой проходящей через p прямой. Эти концы лежат на гранях и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. По упр. 6.28 крайние точки граней являются крайними точками и для Φ. $\square$