§5. Аффинные преобразования и движения евклидовых пространств

5.1. Линейные группы. Линейные биективные отображения $F : V \xrightarrow{\sim} V$ из n-мерного векторного пространства V в себя образуют группу, которая называется *полной линейной группой* пространства V и обозначается $\mathrm{GL}(V)$.

Как мы видели в сл. 2.6 на стр. 37, биективность отображения F равносильна тому, что F имеет нулевое ядро:

$$\ker(F) = \{v \in V \mid F(v) = 0\} = 0\,,$$

или тому, что образы $F(e_1)$, $F(e_2)$, … , $F(e_n)$ векторов какого-нибудь (а значит, и любого) базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V линейно независимы.

Предложение 5.1
Для любых двух линейно независимых наборов векторов

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

n-мерного векторного пространства V существует единственное линейное биективное отображение $F \in \mathrm{GL}(V)$, такое что $F(u_i) = w_i$ при всех i.

Доказательство. Из линейной независимости наборов вытекает, что оба они являются базисами. Искомое линейное отображение обязано действовать на произвольный вектор $v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$ по правилу

$$F(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n) = x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n\,.$$

С другой стороны, отображение F *определённое* по этому правилу, очевидно, линейно и биективно. □

5.1.1. Группа обратимых матриц. На языке матриц линейная независимость векторов

$$F(e_1),\ F(e_2),\ \dots\ ,\ F(e_n)$$

означает (в силу предл. 3.2 на стр. 57), что отличен от нуля определитель матрицы

$$F_{ee} = \big(F(e_1),\ F(e_2),\ \dots\ ,\ F(e_n)\big)\,,$$

в j-том столбце которой стоят координаты вектора $F(e_j)$ в базисе e. Матрицы с ненулевым определителем называются *невырожденными* или *обратимыми*[1]. Они образуют группу относительно операции умножения матриц. Эта группа называется *группой обратимых матриц* и обозначается

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\Bbbk) &= \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) \mid \det M \neq 0\} = \\ &= \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) \mid \exists\, M^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) : MM^{-1} = M^{-1}M = E\}\,.\end{aligned} \tag{5-1}$$

[1] см. предл. 3.4 на стр. 63

Таким образом, сопоставление биективному линейному отображению F его матрицы F_{ee} в каком-либо фиксированном базисе e пространства V устанавливает биекцию между группами $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

Упражнение 5.1. Проверьте, что эта биекция является изоморфизмом групп, т. е. что матрица H_{ee} композиции $H = G \circ F$ линейных отображений $G, F : V \xrightarrow{\sim} V$ равна произведению матриц этих отображений: $H_{ee} = G_{ee}F_{ee}$ (в частности, матрицы двух обратных друг другу линейных отображений суть обратные друг другу матрицы).

5.1.2. Определитель линейного отображения. Зафиксируем на n-мерном векторном пространстве V какую-нибудь ненулевую форму объёма ω. С каждым линейным отображением $F : V \longrightarrow V$ можно связать новую форму объёма ω_F на V, заданную правилом

$$\omega_F(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega\big(F(v_1),\ F(v_2),\ \dots\ ,\ F(v_n)\big)$$

Упражнение 5.2. Убедитесь, что правая часть удовлетворяет свойствам объёма.

Поскольку любые две формы объёма на V пропорциональны, для произвольно взятого набора линейно независимых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ отношение

$$\det(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega\big(F(v_1),\ F(v_2),\ \dots\ ,\ F(v_n)\big)}{\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)} = \det F_{vv} \in \Bbbk\,, \tag{5-2}$$

не зависит ни от выбора ненулевой формы объёма ω на V, ни от выбора линейно независимых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Эта константа называется *определителем* линейного отображения F.

Иначе говоря, определитель линейного отображения — это число, на которое умножается объём ориентированного n-мерного параллелепипеда под действием оператора F (это число не зависит ни от выбора формы объёма, ни от выбора параллелепипеда, при условии, параллелепипед имеет ненулевой объём).

5.1.3. Специальная линейная группа. Линейные отображения определителя 1 суть линейные отображения, сохраняющие объёмы всех ориентированных n-мерных параллелепипедов. Такие отображения составляют в $\mathrm{GL}(V)$ подгруппу, которая называется *специальной линейной группой* пространства V и обозначается

$$\mathrm{SL}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{GL}(V) \mid \det F = 1\}\,.$$

Из упр. 5.1 вытекает, что запись линейных отображений матрицами в каком-либо базисе пространства V изоморфно отображает группу $\mathrm{SL}(V)$ на мультипликативную группу матриц единичного определителя

$$\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) \mid \det M = 1\}\,.$$

5.2. Аффинные отображения. Рассмотрим произвольную пару аффинных пространств A_1 и A_2 над векторными пространствами V_1 и V_2 соответственно. Отображение множеств

$$F \,:\, A_1 \longrightarrow A_2$$

называется *аффинным*, если для какой-нибудь точки $p \in A_1$ отображение

$$D_{p,F} \,:\, V_1 \longrightarrow V_2 \,, \quad \overrightarrow{pq} \;\mapsto\; \overrightarrow{F(p)F(q)} \tag{5-3}$$

является *линейным* отображением из векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

Замечательно, что если это свойство выполнено для какой-то одной точки p, то оно автоматически выполнено сразу для всех точек $r \in A_1$, причём линейное отображение (5-3) не будет зависеть от выбора точки, от которой откладываются векторы:

$$D_{p,F} = D_{r,F} \quad \forall\, p, r \in A_1 \,.$$

В самом деле, для любого вектора $v = \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{pr} \in V_1$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} D_{r,F}(v) = \overrightarrow{F(r)F(q)} = \overrightarrow{F(p)F(q)} - \overrightarrow{F(p)F(r)} = \\ = D_{p,F}(\overrightarrow{pq}) - D_{p,F}(\overrightarrow{pr}) = D_{p,F}(\overrightarrow{pq} - \overrightarrow{pr}) = F_p(v) \,. \end{aligned}$$

Поэтому всюду далее мы обозначаем линейное отображение (5-3) просто через

$$D_F \,:\, V_1 \longrightarrow V_2 \,, \quad \overrightarrow{pq} \;\mapsto\; \overrightarrow{F(p)F(q)}$$

и называем его *дифференциалом* аффинного отображения F.

Такое название согласуется с принятым в анализе. А именно, пусть основное поле $\Bbbk$ есть поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и на пространствах V_1 и V_2 выбраны какие-нибудь евклидовы структуры. В этом случае отображение множеств

$$F : A_1 \longrightarrow A_2$$

называют *дифференцируемым* в точке p, если существует линейное отображение $D_{p,F} : V_1 \longrightarrow V_2$ такое что для любой точки q, стремящейся к p, выполняется равенство

$$F(q) = F(p) + D_{p,F}(\overrightarrow{pq}) + o(|\overrightarrow{pq}|) \,, \tag{5-4}$$

где $o(t)$ означает бесконечно малую по отношению к $t \to 0$ функцию. В курсе анализа доказывается, что линейное отображение $D_{p,F} : V_1 \longrightarrow V_2$, удовлетворяющее (5-4), если существует, то единственно. Оно называется *дифференциалом* отображения F в точке p.

С такой точки зрения аффинное отображение представляет собою всюду дифференцируемое отображение, для которого равенство (5-4) выполняется *без* бесконечно малого поправочного члена $o(|\overrightarrow{pq}|)$. Например, любое аффинное отображение $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет вид $f(x) = ax + b$, а его дифференциал в каждой точке — это линейное отображение $D_f : \Delta x \mapsto a \cdot \Delta x$.

Упражнение 5.3* (по анализу). Покажите, что всюду дифференцируемое отображение $F : A_1 \longrightarrow A_2$ аффинно тогда и только тогда, когда его дифференциал $D_{p,F} : V_1 \longrightarrow V_2$ во всех точках одинаков.

Отметим, что любое аффинное отображение $F : A_1 \longrightarrow A_2$ однозначно восстанавливается по своему дифференциалу $D_F : V_1 \longrightarrow V_2$, как только известен образ $F(p)$ хотя бы одной точки $p \in A_1$. В самом деле: $F(q) = F(p) + D_F(\overrightarrow{pq})$. Из этого замечания вытекает, что два аффинных отображения F и G с одинаковым дифференциалом $D_F = D_G$ отличаются друг от друга на композицию с параллельным переносом. Действительно, вектор $v = \overrightarrow{F(p)G(p)}$ не зависит от выбора точки $p \in A_1$ и $G = \tau_v \circ F$.

Предложение 5.2

Отображение аффинных пространств $F : A_1 \longrightarrow A_2$ тогда и только тогда аффинно, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в A_1 в барицентрические комбинации их образов в A_2 с теми же весами, т. е. когда

$$F(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m) = x_1 \cdot F(p_1) + x_2 \cdot F(p_2) + \cdots + x_m \cdot F(p_m)$$

для любых $p_1, p_2, \dots, p_m \in A_1$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Bbbk$ с $\sum x_i = 1$.

Доказательство. Если отображение F аффинно и имеет дифференциал D_F, то при любых начальной точке $o \in A_1$ и весах $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Bbbk$ с $\sum x_i = 1$

$$\begin{aligned}
F(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m) &= F\left(o + x_1\overrightarrow{op}_1 + x_2\overrightarrow{op}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= F(o) + D_F\left(x_1\overrightarrow{op}_1 + x_2\overrightarrow{op}_2 + \cdots + x_m\overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= F(o) + x_1 \cdot D_F\left(\overrightarrow{op}_1\right) + x_2 \cdot D_F\left(\overrightarrow{op}_2\right) + \cdots + x_m \cdot D_F\left(\overrightarrow{op}_m\right) = \\
&= x_1 \cdot \Big(F(o) + D_F\left(\overrightarrow{op}_1\right)\Big) + \cdots + x_m \cdot \Big(F(o) + D_F\left(\overrightarrow{op}_m\right)\Big) = \\
&= x_1 \cdot F(p_1) + x_2 \cdot F(p_2) + \cdots + x_m \cdot F(p_m).
\end{aligned}$$

Наоборот, если отображение F переводит барицентрические комбинации в барицентрические комбинации, то при любом выборе начальной точки $o \in A_1$ индуцированное отображение $D_{o,F} : V_1 \longrightarrow V_2$, заданное правилом (5-3)

$$D_{o,F}\left(\overrightarrow{op}\right) = \overrightarrow{F(o)F(p)}$$

линейно, поскольку для любой линейной комбинации $\lambda \cdot \overrightarrow{op} + \mu \cdot \overrightarrow{oq}$ точка

$$r = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op} + \mu \cdot \overrightarrow{oq}$$

является барицентрической комбинацией $r = (1 - \lambda - \mu)o + \lambda p + \mu q$, так что

$$F(r) = (1 - \lambda - \mu)F(o) + \lambda F(p) + \mu F(q) = F(o) + \lambda\,\overrightarrow{F(o)F(p)} + \mu\,\overrightarrow{F(o)F(q)},$$

и $D_{o,F}\,(\lambda\,\overrightarrow{op}+\mu\,\overrightarrow{oq}) = D_{o,F}\,(\overrightarrow{or}) = \overrightarrow{F(o)F(r)} =$

$$= \lambda\,\overrightarrow{F(o)F(p)} + \mu\,\overrightarrow{F(o)F(q)} = \lambda\,D_{o,F}\,(\overrightarrow{op}) + \mu\,D_{o,F}\,(\overrightarrow{oq})\ .$$

□

5.3. Аффинная группа. Биективные аффинные отображения $F : A \xrightarrow{\sim} A$ из заданного аффинного пространства A над векторным пространством V в себя образуют группу, которая обозначается $\mathrm{Aff}(A)$ и называется *аффинной группой* (или *группой аффинных преобразований*) пространства A.

Группа $\mathrm{Aff}(A)$ содержит подгруппу *параллельных переносов* (или *сдвигов*) $T \subset \mathrm{Aff}(A)$, изоморфную аддитивной группе векторов пространства V:

$$T \simeq V\,.$$

Вектору $v \in V$ отвечает при этом изоморфизме сдвиг $\tau_v : A \longrightarrow A$, переводящий каждую точку $p \in A$ в точку $p + v \in A$, и композиции сдвигов отвечает сложение векторов: $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$.

Подгруппа сдвигов $T \subset \mathrm{Aff}(A)$ замечательна тем, что для любого сдвига $\tau_v \in T$ и любого аффинного преобразования $F : A \longrightarrow A$ композиция

$$F \circ \tau_v \circ F^{-1} = \tau_{D_F(v)} \tag{5-5}$$

также является сдвигом — на вектор, получающийся применением F к исходному вектору v. В самом деле, $\forall\, p \in A$

$$F \circ \tau_v \circ F^{-1}(p) = F\big(F^{-1}(p) + v\big) = p + D_F(v) = \tau_{D_F(v)}(p)\,.$$

Таким образом, $FTF^{-1} \subset T$ для любого $F \in \mathrm{Aff}(A)$. Подгруппы с таким свойством называются *нормальными* (или *инвариантными*).

Для любой точки $p \in A$ множество всех аффинных автоморфизмов, оставляющих точку p на месте, составляет в $\mathrm{Aff}(A)$ подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки p (в аффинной группе $\mathrm{Aff}(A)$) и обозначается

$$\mathrm{Stab}_p(\mathrm{Aff}(A)) = \{F \in \mathrm{Aff}(A) \mid F(p) = p\}\,.$$

Отображение $\mathrm{Stab}_p(\mathrm{Aff}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V)$, сопоставляющее сохраняющему точку p аффинному отображению F его дифференциал $D_F : V \xrightarrow{\sim} V$, является изоморфизмом групп.

Предложение 5.3

При любом выборе точки $p \in A$ всякий аффинный автоморфизм $F \in \mathrm{Aff}(A)$ единственным образом представляется в виде композиции

$$F = \tau_v \circ G \quad \text{с } G \in \mathrm{Stab}_p(\mathrm{Aff}(A)) \simeq \mathrm{GL}(V)\,.$$

При этом для любых $u, w \in V$ и любых $G, H \in \mathrm{GL}(V)$ имеет место равенство:

$$\big(\tau_u \circ G\big) \circ \big(\tau_w \circ H\big) = \tau_{u+G(w)} \circ G \circ H \tag{5-6}$$

Доказательство. Пусть $F(p) = q$. Тогда $F = \tau_v \circ G$, где $v = \overrightarrow{pq}$, а

$$G = \tau_{-v} \circ F \in \mathrm{Stab}_p(\mathrm{Aff}(A)) .$$

Если у отображения F имеются два представления $\tau_v \circ G = F = \tau_u \circ H$, то применяя к правой и левой части этого равенства обратный к τ_v сдвиг τ_{-v}, получаем

$$G = \tau_{u-v} \circ H$$

в котором оба отображения G, H оставляют на месте точку p. Поскольку при $u \neq v$ сдвиг τ_{u-v} не оставляет точку p на месте, написанное равенство возможно только при $u = v$. Но тогда $\tau_{u-v} = \tau_0 = \mathrm{Id}$ и $G = H$. Правило умножения (5-6) вытекает из формулы (5-5) : $\tau_u \circ G \circ \tau_w \circ H = \tau_u \circ G \circ \tau_w \circ G^{-1} \circ G \circ H = \tau_u \circ \tau_{G(w)} \circ G \circ H$. □

Предложение 5.4

Для любых двух наборов точек $p_0, p_1, \dots , p_n$ и $q_0, q_1, \dots , q_n$ в n-мерном аффинном пространстве A, таких что точки каждого из наборов не лежат в одной аффинной гиперплоскости, существует единственный аффинный автоморфизм $F \in \mathrm{Aff}(A)$, такой что $F(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Из того, что точки каждого из наборов не лежат в гиперплоскости, вытекает, что наборы векторов $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ и $w_i = \overrightarrow{q_0 q_i}$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) являются базисами пространства V. Записывая искомое аффинное отображение в виде $\tau_v \circ F$, где F сохраняет точку p_0, мы видим, что $v = \overrightarrow{p_0 q_0}$, а отображение $F \in \mathrm{GL}(V)$ должно переводить u_i в w_i при всех i. По предл. 5.1 такое отображение F существует и единственно. □

5.3.1. Отступление о полупрямых произведениях[1]**.** Если у группы $\mathfrak{G}$ есть две подгруппы $\mathfrak{N}, \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, такие что

1) подгруппа $\mathfrak{N}$ нормальна (т. е. $g\mathfrak{N}g^{-1} \subset \mathfrak{N} \ \forall g \in \mathfrak{G}$)

2) любой элемент $g \in \mathfrak{G}$ имеет единственное представление в виде

$$g = nh \quad \text{с } n \in \mathfrak{N} \text{ и } h \in \mathfrak{H}$$

то говорят, что $\mathfrak{G}$ является *полупрямым произведением* подгрупп $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$, и пишут $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \leftthreetimes \mathfrak{H}$ или $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \rtimes \mathfrak{H}$.

Упражнение 5.4. Покажите, что требование единственности во втором условии равносильно тому, что подгруппы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$ пересекаются только по единичному элементу группы: $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H} = e$.

Отображение $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$, переводящее n в gng^{-1}, называется *автоморфизмом сопряжения*[2] (или *присоединённым действием*) на $\mathfrak{N}$ элементом g.

[1] этот раздел обращён к читателю, немного знакомому с теорией групп, и его вполне можно пропустить без ущерба для дальнейшего

[2] по-английски *adjunction*, чем и объясняется обозначение Ad_g

Упражнение 5.5. Проверьте, что $\forall g \in \mathfrak{G}$ сопряжение $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{N} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{N}$ является биекцией, а также что для любых $g, g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ и $n_1, n_2 \in \mathfrak{N}$ выполняются соотношения: $\mathrm{Ad}_g(n_1 n_2) = \mathrm{Ad}_g(n_1)\mathrm{Ad}_g(n_2)$ и $\mathrm{Ad}_{g_1 g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1} \circ \mathrm{Ad}_{g_2}$.

Для вычисления композиций в группе $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \rtimes \mathfrak{H}$ достаточно уметь вычислять композиции в подгруппах $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$ и действие на подгруппе $\mathfrak{N}$ автоморфизмов сопряжения $\mathrm{Ad}_h : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ всевозможными элементами $h \in \mathfrak{H}$:

$$(n_1 h_1)(n_2 h_2) = n_1 h_1 n_2 h_1^{-1} h_1 h_2 = (n_1 \mathrm{Ad}_{h_1}(n_2))(h_1 h_2) . \tag{5-7}$$

Наоборот, из любых двух отдельно взятых групп $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$ и гомоморфизма

$$\psi : \mathfrak{H} \xrightarrow{h \mapsto \psi_h} \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{N}) ,$$

из группы $\mathfrak{H}$ в группу автоморфизмов группы $\mathfrak{N}$ — т. е. правила, сопоставляющего каждому элементу $h \in \mathfrak{H}$ отображение $\psi_h : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ так, что при этом выполняются все свойства из упр. 5.5: для любых $h, h_1, h_2 \in \mathfrak{H}$ и $n_1, n_2 \in \mathfrak{N}$

$$\psi_{h_1 h_2} = \psi_{h_1} \circ \psi_{h_2} \quad \text{и} \quad \psi_h(n_1 n_2) = \psi_h(n_1)\psi_h(n_2) ,$$

можно изготовить новую группу, элементами которой являются всевозможные пары $(n, h) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}$, а умножение таких пар задаётся по формуле (5-7):

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (n_1 \cdot \psi_{h_1}(n_2)\, ,\ h_1 \cdot h_2) . \tag{5-8}$$

Эта группа называется (внешним) полупрямым произведением групп $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$ с присоединённым действием ψ и обозначается $\mathfrak{N} \underset{\psi}{\rtimes} \mathfrak{H}$.

Упражнение 5.6. Проверьте, что $\mathfrak{N} \underset{\psi}{\rtimes} \mathfrak{H}$ действительно является группой, причём

$$\mathfrak{N} \times e = \{(n, e) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{H} \mid n \in \mathfrak{N}\}$$

является в ней нормальной подгруппой, а $e \times \mathfrak{H} = \{(e, h) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{H} \mid h \in \mathfrak{H}\}$ — просто подгруппой (необязательно нормальной), и фактор группа

$$\frac{\mathfrak{N} \rtimes \mathfrak{H}}{\mathfrak{N}} \simeq \mathfrak{H} .$$

На таком языке доказанное выше предл. 5.3 утверждает, что аффинная группа $\mathrm{Aff}(A)$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы сдвигов и подгруппы аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольным образом зафиксированную точку $p \in A$, и изоморфна (внешнему) полупрямому произведению аддитивной группы векторного пространства V и полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$:

$$\mathrm{Aff}(A) = T \rtimes \mathrm{Stab}_p(\mathrm{Aff}(A)) \simeq V \rtimes \mathrm{GL}(V)$$

причём автоморфизм сопряжения $\psi_F : V \longrightarrow V$, отвечающий $F \in \mathrm{GL}(V)$, равен самому $F : V \xrightarrow{\sim} V$.

Упражнение 5.7. Покажите, что сопоставление аффинному отображению его дифференциала корректно задаёт изоморфизм групп $\mathrm{Aff}(A)/T \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V)$.

5.4. Квазиаффинные преобразования. Биективное преобразование n-мерного аффинного пространства A над векторным пространством V

$$F : A \xrightarrow{\sim} A$$

называется *квазиаффинным*, если оно переводит аффинные прямые в аффинные прямые. Квазиаффинные преобразования, очевидно, образуют группу.

Если $n = \dim A = 1$, то квазиаффинность не означает ничего, кроме биективности, и поэтому геометрически и алгебраически бессодержательна.

Однако, если $n = \dim A \geqslant 2$, то квазиаффинные преобразования оказываются очень близки к аффинным, а над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, где p простое, все квазиаффинные преобразования аффинны. Выясняется это так.

Поскольку пара различных пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2 переводится квазиаффинным отображением в пару различных пересекающихся прямых

$$\ell_1' = F(\ell_1) \quad \text{и} \quad \ell_2' = F(\ell_2)\,,$$

аффинная плоскость, натянутая на ℓ_1 и ℓ_2 и заметаемая всевозможными прямыми (ab) с $a \in \ell_1$, $b \in \ell_2$, перейдёт в аффинную плоскость, натянутую на ℓ_1' и ℓ_2'. Поэтому квазиаффинное отображение переводит двумерные аффинные плоскости в двумерные аффинные плоскости.

Из биективности квазиаффинного отображения вытекает, что оно переводит параллельные[1] прямые в параллельные прямые, а параллелограммы — в параллелограммы. Это означает, во-первых, что из равенства векторов $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ вытекает равенство векторов $\overrightarrow{F(p)F(q)} = \overrightarrow{F(r)F(s)}$, т. е. отображение F корректно определяет отображение

$$D_F : V \longrightarrow V \ : \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{F(p)F(q)} \tag{5-9}$$

из подлежащего *векторного* пространства V в себя[2]. А во-вторых, это означает, что отображение D_F, задаваемое правилом (5-9), аддитивно:

$$D_F(u + w) = D_F(u) + D_F(w) \quad \forall\, u, w \in V\,.$$

В самом деле, если векторы u и w не пропорциональны, то написанное равенство утверждает в точности, что параллелограмм со сторонами u, v переходит в параллелограмм со сторонами $D_F(u)$ и $D_F(w)$, а если векторы u и $w = \lambda u$ пропорциональны, то записывая u как сумму каких-либо двух векторов v_1 и v_2, каждый из которых не пропорционален u и w, получаем по уже доказанному

$$\begin{aligned} D_F(u + w) &= D_F(v_1 + v_2 + w) = D_F(v_1) + D_F(v_2 + w) = \\ &= D_F(v_1) + D_F(v_2) + D_F(w) = D_F(v_1 + v_2) + D_F(w) = D_F(u) + D_F(w)\,. \end{aligned}$$

[1] т. е. лежащие в одной двумерной плоскости и не пересекающиеся

[2] отметим, что даже если векторы $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ лежат на одной аффинной прямой, равенство $\overrightarrow{F(p)F(q)} = \overrightarrow{F(r)F(s)}$ всё равно имеет место, поскольку выбирая вектор $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ на параллельной $(pq) = (rs)$ прямой $(xy) \neq (pq)$, мы получим нетривиальные параллелограммы $pxyq$ и $rxys$ (см. рис. 5◇1), а значит, равенства $\overrightarrow{F(p)F(q)} = \overrightarrow{F(x)F(y)} = \overrightarrow{F(r)F(s)}$

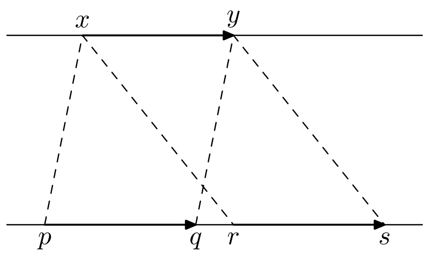

Рис. 5◇1. Корректность определения D_F.

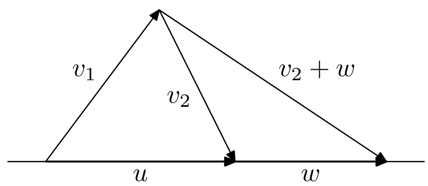

Рис. 5◇2. Аддитивность D_F.

Отметим, что отображение F однозначно восстанавливается, если известно отображение D_F и образ $F(p)$ хоть одной точки $p \in A$. Действительно, образ произвольной точки $q \in A$ вычисляется тогда как

$$F(q) = F(p) + \overrightarrow{F(p)F(q)} = F(p) + D_F\left(\overrightarrow{pq}\right).$$

Предложение 5.5

Если $\dim A \geqslant 2$, то отображение D_F, определённое равенством (5-9), *квазилинейно* в том смысле, что существует *автоморфизм* $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ основного поля $\Bbbk$, зависящий только от F, такой что

$$D_F(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda) \cdot D_F(u) + \psi(\mu) \cdot D_F(w) \tag{5-10}$$

для любых векторов $u, w \in V$ и любых чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$. □

Замечание 5.1 (об автоморфизмах полей) Напомним из курса алгебры, что биективное отображение из поля в себя $\psi : \Bbbk \xrightarrow{\sim} \Bbbk$ называется *автоморфизмом* этого поля, если оно сохраняет операции:

$$\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu) \quad \text{и} \quad \psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu) \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk\,.$$

Из этих двух равенств вытекает, что $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при $\mu \neq 0$.

Упражнение 5.8. Докажите это, а также проверьте, что любое сохраняющее операции отображение $\psi : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$, не равное нулю тождественно, автоматически инъективно.

Отметим, что *простые* поля $\Bbbk = \mathbb{Q}$ и $\Bbbk = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ (где $p \in \mathbb{N}$ — простое) не имеют автоморфизмов, отличных от тождественного, поскольку равенство $\psi(1) = 1$ однозначно определяет действие ψ на каждый элемент поля:

$$\psi(\pm m/n) = \pm\psi(m)/\psi(n) = \pm\psi(1 + 1 + \cdots + 1)/\psi(1 + 1 + \cdots + 1) = \pm m/n$$

для натуральных m и n (а также их вычетов по модулю p).

Упражнение 5.9. Покажите, что если поле $\Bbbk$ не содержит никаких подполей отличных от самого себя, то $\Bbbk = \mathbb{Q}$ или $\Bbbk = \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое.

Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ также не имеет нетождественных автоморфизмов. В самом деле, всякий автоморфизм $\psi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, согласно предыдущему, тождественно действует на простом подполе $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и *строго монотонен*, поскольку неравенство $\lambda < \mu$ означает, что $\mu - \lambda = \alpha^2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, и тогда

$$\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$$

т. е. $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$.

Упражнение 5.10. Покажите, что строго монотонная функция $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, совпадающая с функцией $f(x) = x$ при $x \in \mathbb{Q}$, совпадает с нею $\forall x \in \mathbb{R}$.

Напротив, поле комплексных чисел $\Bbbk = \mathbb{C}$ имеет нетождественные автоморфизмы: например, автоморфизм комплексного сопряжения $z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$.

Таким образом, предл. 5.5 означает, что над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{F}_p$ всякое квазиаффинное отображение является аффинным, а над полями, имеющими нетождественные автоморфизмы (например, над полем $\mathbb{C}$), существуют неаффинные квазиаффинные отображения, у которых D_F не линеен, а лишь *квазилинеен*[1], причём все такие отображения получаются «подкруткой» аффинных отображений на всевозможные автоморфизмы ψ поля $\Bbbk$ по формуле (5-10).

Доказательство предл. 5.5. Отображение $D_F : V \longrightarrow V$ переводит одномерные подпространства в одномерные подпространства. Следовательно, каждый ненулевой вектор $v \in V$ задаёт отображение $\psi_v : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$, такое что

$$F(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot F(v) \, .$$

Покажем, что для любых двух непропорциональных векторов u и w эти отображения одинаковы: $\psi_u = \psi_w$. Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в пересекающиеся в одной точке прямые, векторы $D_F(u)$ и $D_F(w)$ не пропорциональны и составляют базис в натянутом на них двумерном подпространстве. Из аддитивности отображения $D_F : V \longrightarrow V$ вытекает, что

$$\begin{array}{l} D_F(\lambda(u+w)) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_F(u+w) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_F(u) + \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_F(w) \\ \qquad\qquad \| \\ D_F(\lambda u + \lambda w) = D_F(\lambda u) + D_F(\lambda w)) = \psi_u(\lambda) \cdot D_F(u) + \psi_w(\lambda) \cdot D_F(w) \, . \end{array}$$

Поскольку разложение вектора по базису единственно, мы получаем равенства

$$\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda) \, .$$

Отсюда вытекает, что отображение $\psi_v : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$ вообще не зависит от v: для ненулевых пропорциональных векторов v и μv мы тоже имеем равенство

[1] т. е. получается «скручиванием» линейного отображения с автоморфизмом основного поля, как в формуле (5-10)

$\psi_v = \psi_{\mu v}$, поскольку для любого непропорционального v вектора w выполняются равенства $\psi_v = \psi_w = \psi_{\mu v}$.

Остаётся показать, что независящее от v отображение $\psi = \psi_v : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$ перестановочно со сложением и умножением. Это тоже следует из аддитивности отображения $D_F : V \longrightarrow V$. Равенство

$$\psi(\lambda+\mu)\cdot D_F(v) = D_F\big((\lambda+\mu)v\big) = D_F(\lambda v+\mu v) = D_F(\lambda v) + F(\mu v) = \\ = \psi(\lambda)\cdot D_F(v) + \psi(\mu)\cdot D_F(v) = \big(\psi(\lambda)+\psi(\mu)\big)\cdot D_F(v)$$

влечёт равенство $\psi(\lambda+\mu) = \psi(\lambda)+\psi(\mu)$. Точно таким же образом из

$$\psi(\lambda\mu)\cdot D_F(v) = D_F\big((\lambda\mu)v\big) = D_F\big(\lambda(\mu v)\big) = \psi(\lambda)\cdot D_F(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu)\cdot D_F(v)$$

получаем $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\cdot\psi(\mu)$. □

5.5. Движения. Всюду далее мы считаем, что основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, и n-мерное аффинное пространство A евклидово. Отображение $F : A \longrightarrow A$ называется *движением* (или *изометрией*), если оно сохраняет расстояние между точками:

$$|pq| = |F(p)F(q)| \quad \forall\, p,q \in A\,.$$

Поскольку каждый отрезок $[a,b] \subset A$ есть ГМТ x, таких что $|ax|+|xb| = |ab|$, любое движение переводит отрезки в отрезки, а значит, прямые — в прямые.

Упражнение 5.11. Покажите, что любое движение является биекцией.

Таким образом, любое движение является аффинным автоморфизмом, и все движения образуют в аффинной группе подгруппу. Она называется *группой движений* (или *группой изометрий*) и обозначается $\mathrm{Isom}(A) \subset \mathrm{Aff}(A)$. Отметим, что группа движений содержит всю группу параллельных переносов T.

5.5.1. Ортогональная группа. Дифференциал

$$G = D_F : V \xrightarrow{\sim} V\,, \quad G\,(\overrightarrow{pq}) \;=\; \overrightarrow{F(p)F(q)}$$

любого движения $F : V \xrightarrow{\sim} V$ сохраняет длины векторов:

$$|G(v)| = |v| \quad \forall\, v \in V\,.$$

Так как скалярное произведение на V однозначно выражается через длины векторов[1], G сохраняет и все скалярные произведения:

$$(G(u), G(w)) = (u,w) \quad \forall\, u,w \in V\,.$$

[1]см. форм. (4-7) на стр. 70

Линейные автоморфизмы евклидова векторного пространства V, сохраняющее скалярное произведение, называются *ортогональными операторами*. Они составляют в полной линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ пространства V подгруппу, которая обозначается[1]

$$\mathrm{O}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{G \in \mathrm{GL}(V) \mid (G(u), G(w)) = (u, w) \quad \forall\, u, w \in V\}$$

и называется *ортогональной группой* (или *группой изометрий*) евклидова пространства V.

Отметим, что ортогональную группу $\mathrm{O}(V)$ можно (многими разными способами) вложить в группу движений $\mathrm{Isom}(A)$ в качестве подгруппы

$$\mathrm{Stab}_p(\mathrm{Isom}(A)) \simeq \mathrm{O}(V)$$

движений, оставляющих на месте какую-нибудь точку $p \in A$.

Упражнение 5.12 (для тех, кто усвоил n° 5.3.1). Убедитесь, что группа движений изоморфна полупрямому произведению группы сдвигов и ортогональной группы: $\mathrm{Isom}(A) \simeq V \rtimes \mathrm{O}(V)$, причём автоморфизм сопряжения элементов нормальной подгруппы V ортогональным оператором $F \in \mathrm{O}(V)$ заключается в применении этого оператора к векторам.

5.5.2. Собственные и несобственные движения. Поскольку ортогональный оператор сохраняет матрицу Грама любого базиса пространства V, он сохраняет и абсолютную величину объёма n-мерных параллелепипедов. Следовательно, определитель любого ортогонального оператора равен ± 1.

Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы составляют в группе всех ортогональных операторов нормальную подгруппу, которая обозначается

$$\mathrm{SO}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{O}(V) \mid \det F = 1\} = \mathrm{O}(V) \cap \mathrm{SL}(V)$$

и называется *специальной ортогональной группой* или группой *собственных* ортогональных операторов.

Ортогональные операторы определителя -1, меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

В соответствии с этим движение пространства A также называется *собственным* или *несобственным*, смотря по тому, собственный или несобственный у него дифференциал.

Упражнение 5.13. Покажите, что на одномерном евклидовом векторном пространстве имеется ровно один собственный ортогональный оператор — тождественное отображение Id, и ровно один несобственный — симметрия относительно нуля $-\mathrm{Id} : v \mapsto -v$.

[1] отметим, что ортогональная подгруппа *зависит* от выбора скалярного произведения на V, хотя эта зависимость и скрыта в обозначении $\mathrm{O}(V)$

Пример 5.1 (центральная симметрия)
Оператор $-\mathrm{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V. Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

Образ этого оператора при вложении $\mathrm{O}(V)$ в $\mathrm{Isom}(A)$ в качестве подгруппы движений, сохраняющих точку $p \in A$, называется *центральной симметрией* (или *отражением*) относительно точки p. Мы будем обозначать это движение через $\sigma_p : A \longrightarrow A$. Равенство $\sigma_p(q) = r$ по определению означает, что

$$\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{pr}\,.$$

Отметим, что $\sigma_p^2 = \mathrm{Id}$, и p является единственной неподвижной точкой инволюции σ_p.

Упражнение 5.14. Покажите, что $\sigma_q \circ \sigma_p = \tau_v$, где $v = 2\,\overrightarrow{pq}$.

Пример 5.2 (отражения)
Согласно сл. 4.3 на стр. 76 с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Обозначим через $\sigma_U : V \longrightarrow V$ единственный линейный оператор, который тождественно действует на подпространстве U и меняет знак всех векторов из $U^\perp$. Действие σ_U на произвольный вектор $v = u_v + u_v^\perp$, ортогонально проектирующийся в векторы $u_v \in U$ и $u_v^\perp \in U^\perp$, задаётся, таким образом, формулой

$$\sigma_U(v) = \sigma_U(u_v + u_v^\perp) = u_v - u_v^\perp = v - 2\,u_v^\perp\,. \tag{5-11}$$

Это ортогональный оператор, поскольку по теореме Пифагора

$$|\sigma_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2\,.$$

Он называется *отражением* в подпространстве U. Предыдущий прим. 5.1 является частным случаем этой конструкции: центральная симметрия есть отражение в нулевом подпространстве $U = 0$.

Образ оператора σ_U при вложении $\mathrm{O}(V)$ в $\mathrm{Isom}(A)$ в качестве подгруппы движений, сохраняющих точку $p \in A$, называется *отражением в аффинной плоскости* $\Pi = p + U$ и обозначается σ_Π. Равенство $\sigma_\Pi(q) = r$ означает, что вектор $\overrightarrow{rq}$ равен удвоенной ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{pq}$ на подпространство $U^\perp$.

Отметим, что $\sigma_p^2 = \mathrm{Id}$, инволюция σ_Π является собственной, если и только если коразмерность Π чётна, и множество неподвижных точек инволюции σ_Π есть в точности аффинная плоскость Π.

Упражнение 5.15. Пусть аффинные плоскости $\Pi_1 = p_1 + U$ и $\Pi_2 = p_2 + U$ имеют одно и то же направляющее векторное подпространство $U \subset V$, причём точки p_1 и p_2 выбраны так, чтобы вектор $\overrightarrow{p_1p_2}$ был перпендикулярен U. Покажите, что $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1} = \tau_v$, где $v = 2\,\overrightarrow{p_1p_2}$.

Пример 5.3 (отражение в гиперплоскости)
Важным частным случаем отражения является отражение в гиперплоскости $U = u^{\perp}$, перпендикулярной какому-нибудь ненулевому вектору $u \in V$. Такое отражение принято обозначать через σ_u. Согласно (5-11)

$$\sigma_u(v) = v - 2\,\frac{(u,v)}{(u,u)} \cdot u\,. \qquad (5\text{-}12)$$

Упражнение 5.16. Проверьте прямым вычислением, что σ_u сохраняет скалярные произведения.

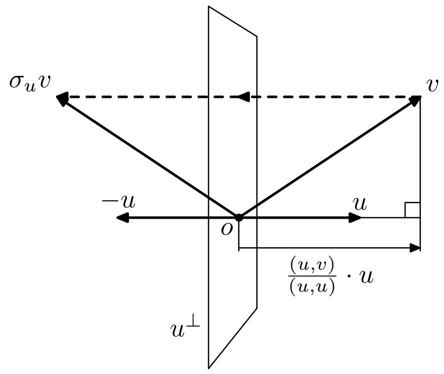

Рис. 5◇3. Отражение в гиперплоскости $u^{\perp}$.

Отражение в аффинной гиперплоскости

$$(u,x) = (u,p)\,,$$

проходящей через точку $p \in A$ перпендикулярно вектору $u \in V$, мы будем обозначать через $\sigma_{p,u}$. Равенство $\sigma_{p,u}(q) = r$ означает, что

$$\overrightarrow{rq} = 2\,\frac{(u,v)}{(u,u)} \cdot u\,.$$

Подчеркнём, что отражение в гиперплоскости всегда является *несобственным* движением.

Лемма 5.1
Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$, переводятся друг в друга отражением σ_{a-b}.

Доказательство. Поскольку $(a+b, a-b) = |a|^2 - |b|^2 = 0$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{a-b}(a) = a - \frac{2\,(a,a-b)}{(a-b,a-b)} \cdot (a-b) &= \\ = a - \frac{2\,(a,a-b) - (a+b,a-b)}{(a-b,a-b)} \cdot (a-b) &= \\ = a - \frac{(a-b,a-b)}{(a-b,a-b)} \cdot (a-b) &= b\end{aligned}$$

□

Замечание 5.2 Если $\dim V = 1$, то оператор $\sigma_{a-b} = -\mathrm{Id}$ (на прямой разные векторы одинаковой длины отличаются друг от друга знаком).

Если $\dim V \geqslant 2$, то оператор σ_{a-b} представляет собой отражение относительно серединного перпендикуляра к диагонали ромба со сторонами a и b (ср. с прим. 4.4 на стр. 71 и упр. 1.10 на стр. 22).

Предложение 5.6
Любой ортогональный оператор на n-мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по n. Если $V = 0$ или $F = \mathrm{Id}$, то доказывать нечего. Если же есть вектор $v \neq F(v)$, то по лем. 5.1 существует отражение σ, переводящее $F(v)$ в v. Тогда $F = \sigma\circ G$, где $G = \sigma\circ F$ оставляет вектор v на месте. Но тогда G переводит в себя $(n-1)$-мерное подпространство $v^\perp$, и ограничение G на $v^\perp$ является по индукции композицией не более $(n-1)$ отражений $\widetilde{\sigma}_i$ в $(n-2)$-мерных гиперплоскостях внутри $v^\perp$. Каждое из этих отражений является ограничением на $v^\perp$ отражения σ_i всего пространства V в $(n-1)$-мерной гиперплоскости, натянутой на $(n-2)$-мерную неподвижную гиперплоскость отражения $\widetilde{\sigma}_i$ и вектор v. Композиция отражений σ_i равна G. Поэтому $F = \sigma\circ G$ является композицией не более n отражений. □

Следствие 5.1
Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного числа отражений в гиперплоскостях, а всякий несобственный — композицией нечётного числа отражений.

Пример 5.4 (группы $\mathrm{O}_2 = \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ и $\mathrm{SO}_2 = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$)
Всякий несобственный ортогональный линейный оператор на двумерном евклидовом векторном пространстве V является отражением σ_u относительно прямой $u^\perp$, перпендикулярной какому-нибудь ненулевому вектору u.

Собственный ортогональный линейный оператор $F : V \longrightarrow V$ либо тождественен, либо является композицией двух отражений $\sigma_2\circ\sigma_1$ относительно прямых $u_2^\perp$ и $u_1^\perp$ соответственно, причём векторы u_1 и u_2 непропорциональны (иначе $\sigma_2 = \sigma_1$, и $F = \sigma_1^2 = \mathrm{Id}$). Поскольку векторы u_1 и u_2 составляют в V базис и каждый из них под действием преобразования $F = \sigma_2\circ\sigma_1$ поворачивается в направлении от u_1 к u_2 на удвоенный угол между векторами u_1 и u_2 (см. рис. 5◇4), F является поворотом на угол $2\,\widehat{u_1u_2}$.

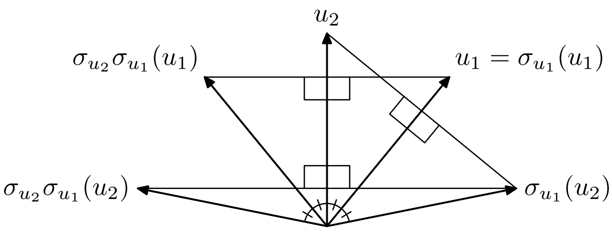

Рис. 5◇4. Композиция отражений.

Таким образом, специальная ортогональная группа $\mathrm{SO}(V)$ двумерного евклидова пространства V состоит из поворотов. Поворот ϱ_φ против часовой стрелки на угол φ имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе матрицу

$$\varrho_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5-13}$$

Такие матрицы образуют в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ всех 2×2 матриц единичного определителя *коммутативную* подгруппу, которая обозначается $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Упражнение 5.17. Покажите прямым алгебраическим вычислением, что всякая вещественная матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с ортонормальными столбцами и определителем 1 имеет вид (5-13) для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$, а также удостоверьтесь прямым умножением матриц, что $\varrho_\varphi \circ \varrho_\psi = \varrho_{\varphi+\psi}$.

Пример 5.5 (группа $\mathrm{SO}_3 = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$)
Всякий нетождественный собственный ортогональный оператор F на трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией двух отражений $F = \sigma_2\sigma_1$ в 2-мерных плоскостях $u_2^\perp$, $u_1^\perp$, перпендикулярных векторам u_2 и u_1 соответственно, причём эти векторы не пропорциональны (иначе отражения совпадают, и $F = \mathrm{Id}$).

Обозначим плоскость, порождённую векторами u_1 и u_2, через U. Оператор F тождественно действует на перпендикулярной к U прямой

$$U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]\,,$$

порождённой векторным произведением[1] $[u_1, u_2]$ векторов u_1 и u_2. Поэтому F переводит ортогональную этой прямой плоскость U в себя и согласно предыдущему прим. 5.4 действует на ней как поворот на угол $2\,\widehat{u_1 u_2}$ в направлении от u_1 к u_2.

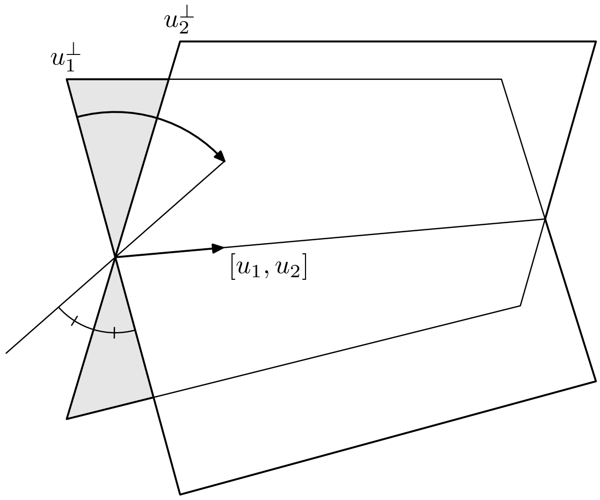

Рис. 5◇5. Поворот.

Иначе можно сказать, что F является поворотом вокруг прямой, порождённой вектором $[u_1, u_2]$, на угол $2\,\widehat{u_1 u_2}$ по часовой стрелке, если глядеть вдоль вектора $[u_1, u_2]$.

Таким образом, всякий собственный ортогональный оператор на трёхмерном евклидовом векторном пространстве представляет собою поворот вокруг некоторой прямой. Этот факт известен как *теорема Эйлера* о вращениях трёхмерного пространства.

Последние два примера имеют следующее обобщение.

Теорема 5.1
Для любого ортогонального оператора F на произвольном конечномерном евклидовом векторном пространстве V существует разложение пространства V в прямую сумму попарно ортогональных друг другу одномерных и двумерных подпространств: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, такое что оператор F переводит каждое подпространство U_i в себя и действует на нём либо как поворот (если $\dim U_i = 2$), либо как Id или $-\mathrm{Id}$ (если $\dim U_i = 1$).

[1] см. прим. 4.7 на стр. 79

Замечание 5.3 Угол поворота, которым F действует на двумерном подпространстве U_i, для разных подпространств может быть разным.

Любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как $-\mathrm{Id}$, можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на угол π. Точно также любую пару одномерных подпространств, на которых F действует как Id, можно объединить в одно двумерное подпространство, на котором F действует как поворот на нулевой угол.

После того, как будут проделаны все эти объединения, можно сказать, что одномерных подпространств U_i в теор. 5.1 имеется не более двух.

В такой уточнённой формулировке теор. 5.1 оператор F является собственным тогда и только тогда, когда одномерных пространств останется не более одного, причём F будет действовать на оставшемся одномерном пространстве как Id. Аналогично, оператор F является несобственным тогда и только тогда, когда среди оставшихся одного или двух одномерных пространств есть ровно одно, на котором F действует как $-\mathrm{Id}$.

Доказательство теор. 5.1. В основе доказательства лежит следующая лемма, имеющая множество других приложений в геометрии над полем $\mathbb{R}$.

Лемма 5.2
Для любого линейного отображения $F : V \longrightarrow V$, действующего на конечномерном векторном пространстве над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, в V существует двумерное или одномерное подпространство $U \subset V$, которое переводится отображением F в себя.

Доказательство. Достаточно указать в V ненулевой вектор $w \in V$, такой что вектор $F^2(w) = F(F(w))$ линейно выражается через w и $F(w)$ — в этом случае линейная оболочка U векторов w и $F(w)$ будет обладать нужными свойствами.

Существование чисел $a, b \in \mathbb{R}$, таких что $F(w^2) + a \cdot F(w) + b \cdot w = 0$, удобно записывать равенством $(F^2 + a\,F + b)\,w = 0$, где мы полагаем

$$F^k\,w \stackrel{\text{def}}{=} F^k(w) = F(F(\ldots F(w)\ldots))$$

(k раз применили F). В этих обозначениях для любых двух многочленов $f(F)$ и $g(F)$ с вещественными коэффициентами от переменной F, произведение которых в кольце $\mathbb{R}[F]$ равно $h(F) = f(F) \cdot g(F)$, и для любого вектора $v \in V$ в пространстве V имеет место равенство векторов $h(F)\,v = f(F)[g(F)v]$, где в квадратных скобках справа стоит вектор $g(F)\,v \in V$.

Для отыскания нужного вектора w рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$. В конечномерном пространстве V счётное множество векторов

$$v\,,\ Fv\,,\ F^2v\,,\ F^3v\,,\ \ldots$$

линейно зависимо. Это означает, что существует многочлен $f(F) \in \mathbb{R}[F]$ со старшим коэффициентом 1, такой что $f(F)v = 0$. Как известно из курсов алгебры и анализа, любой многочлен в $\mathbb{R}[x]$ является произведением линейных и квадратичных. Запишем $f(F)$ как $f(F) = g_m(F) \cdot g_{m-1}(F) \cdot \cdots \cdot g_1(F)$, где $\deg g_i \leqslant 2$ и все g_i имеют старший коэффициент 1. Рассмотрим наибольшее k, для которого вектор $w = g_{k-1}(F) \cdot \cdots \cdot g_2(F) \cdot g_1(F)\, v$ отличен от нуля. Тогда $g_k(F)w = 0$ и подпространство $U \subset V$, порождённое w и Fw обладает нужными свойствами. □

Докажем теор. 5.1 индукцией по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были разобраны выше в упр. 5.13 и прим. 5.4. Пусть $\dim V \geqslant 3$. Согласно лем. 5.2 оператор $F : V \longrightarrow V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, F переводит в себя и ортогонал $U^\perp$ к подпространству U. Ограничения F на U и на $U^\perp$ являются ортогональными операторами в этих подпространствах, имеющих размерности строго меньшие, чем $\dim V$. По индукции, F имеет на каждом из них требуемые разложения. Складывая эти разложения вместе, получаем нужное разложение для $V = U \oplus U^\perp$. □

5.5.3. Отыскание углов поворотов. Для каждого линейного отображения $F : V \longrightarrow V$ и числа $t \in \mathbb{R}$ разность гомотетии с коэффициентом t и отображения F:

$$t\,\mathrm{Id} - F : v \mapsto tv - F(v)$$

является линейным отображением из пространства V в себя. Определитель этого линейного отображения является многочленом от t. Он называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается

$$\chi_F(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - F) \in \mathbb{R}[t]\,.$$

Согласно формуле (5-2) для вычисления характеристического многочлена достаточно написать матрицу F_{ee} оператора F в каком-нибудь базисе и вычислить определитель матрицы $t\,E - F_{ee}$:

$$\chi_F(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - F) = \det(t\,E - F_{ee})$$

Например, характеристический многочлен оператора гомотетии $F = \lambda\,\mathrm{Id}$ с коэффициентом λ на n-мерном пространстве равен

$$\chi_{\lambda\mathrm{Id}}(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det\left(\begin{pmatrix} t & & & \\ & t & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-\lambda & & & \\ & t-\lambda & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & t-\lambda \end{pmatrix} = (t-\lambda)^n$$

А характеристический многочлен оператора поворота (5-13) евклидовой плоскости на угол φ против часовой стрелки равен

$$\chi_{\varrho_\varphi}(t) = \det(t\,\mathrm{Id} - \varrho_\varphi) = \det\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \det\begin{pmatrix} t-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & t-\cos\varphi \end{pmatrix} = t^2 + t\cdot 2\,\cos\varphi + 1\,.$$

Из теор. 5.1 и следующего за нею зам. 5.3 вытекает, что характеристический многочлен ортогонального оператора F на евклидовом пространстве V является произведением некоторого количества квадратных трёхчленов вида

$$\chi_{\varrho_\varphi}(t) = t^2 + t\cdot 2\,\cos\varphi + 1 \tag{5-14}$$

с $\varphi \in [0,\pi]$ и, может быть, ещё линейного двучлена $(t+1)$ или $(t-1)$, либо квадратного двучлена $(t-1)(t+1) = t^2-1$.

В самом деле, матрица F_{ee} оператора F в ортонормальном базисе e пространства V, составленном из ортонормальных базисов попарно ортогональных подпространств U_i, состоит из нескольких идущих вдоль главной диагонали блоков размера 2×2, представляющих собою матрицы поворотов в двумерных подпространствах, и, может быть, ещё одного диагонального элемента, равного $+1$ или -1, либо двух диагональных элементов, равных $+1$ и -1. Все остальные элементы F_{ee} матрицы будут нулевыми. Вычисляя определитель матрицы $t\,E-F_{ee}$, получаем произведение трёхчленов (5-14) и либо двучлена $(t+1)$ или $(t-1)$, либо двучлена $(t-1)(t+1)=t^2-1$.

Предложение 5.7

Косинусы и синусы отличных от 0 и π углов поворотов, которыми оператор F из теор. 5.1 действует на двумерных подпространствах U_i, суть вещественные и мнимые части комплексных корней характеристического многочлена $\chi_F(t)$ оператора F. Количество одномерных подпространств U_i из теор. 5.1, на которых F действует как Id или как $-\mathrm{Id}$, равно количеству корней характеристического многочлена $\chi_F(t)$, равных 1 и -1 соответственно.

Доказательство. Многочлен $\chi_{\varrho_\varphi}(t) = t^2+t\cdot 2\,\cos\varphi+1$ имеет два комплексно сопряжённых корня $t_\pm = \cos\varphi \pm i\,\sin\varphi$, которые при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ превращаются в двукратный корень, равный 1 и -1 соответственно. □

Следствие 5.2

Неупорядоченный набор углов поворотов в двумерных подпространствах из зам. 5.3, а также количество оставшихся одномерных подпространств и ограничения оператора F на эти одномерные подпространства не зависят от выбора разложения, о котором идёт речь в теор. 5.1. □

По этой причине данное в теор. 5.1 описание ортогонального оператора называется *каноническим видом* этого оператора.