§4. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$.

4.1. Евклидовы пространства. Напомним[1], что векторное V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если на нём задано *скалярное произведение* (или *евклидова структура*) — симметричная форма

$$(*, *) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

сопоставляющая паре векторов $u, w \in V$ число $(u, w) = (w, u) \in \mathbb{R}$, так что выполняется стандартное правило раскрытия скобок:

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\,,\ \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (u_i, w_j)$$

и скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны:

$$(v, v) > 0 \quad \forall\, v \neq 0\,.$$

Ограничение скалярного произведения на любое подпространство в V задаёт евклидову структуру на этом подпространстве. В частности, линейная оболочка любой пары непропорциональных векторов в любом евклидовом пространстве представляет собою обычную «школьную» евклидову плоскость, подробно обсуждавшуюся нами в n° 1.5.

Пример 4.1 (стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^n$)
Зададим скалярное произведение двух векторов

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

координатного пространства $\mathbb{R}^n$ формулой

$$(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\,. \tag{4-1}$$

Упражнение 4.1. Убедитесь, что эта форма билинейна, симметрична и положительна.

Пример 4.2 (пространство непрерывных функций)
Зададим скалярное произведение непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx\,. \tag{4-2}$$

[1] см. опр. 1.2 на стр. 19

Упражнение 4.2. Выведите из известных вам свойств интегралов от непрерывных функций, что это произведение билинейно и положительно.

Формула (4-2) является прямым обобщением формулы (4-1), если воспринимать функции как «континуальные наборы координат», номера которых суть точки отрезка. Произведение (4-2) допускает разнообразные вариации. Вместо непрерывных функций можно рассматривать другие классы функций, для которых выполняется свойство

$$f \not\equiv 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \neq 0\,.$$

Можно ограничивать произведение (4-2) на различные подпространства — например, на конечномерное подпространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n. Можно варьировать само понятие интеграла (брать интеграл Лебега, интеграл Римана и т. п.) или интегрировать с каким-нибудь весом. Наконец, можно заменить отрезок другой областью интегрирования.

4.1.1. Расстояния и углы. Длина вектора и угол между двумя векторами в евклидовом пространстве определяются формулами:

$$|v| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(v,v)} \tag{4-3}$$

$$\cos(\widehat{vw}) \overset{\text{def}}{=} \frac{(v,w)}{|v|\cdot|w|}\,. \tag{4-4}$$

То, что правая часть формулы (4-4) действительно лежит в множестве значений косинуса, а длина (4-3) удовлетворяет неравенству треугольника[2]:

$$\forall\, u,w \quad |u|+|w| \geqslant |u+w|\,, \tag{4-5}$$

вытекает из более общего неравенство Коши – Буняковского – Шварца[1]

$$(v,v)\cdot(w,w) \geqslant (v,w)^2\,, \tag{4-6}$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов u и w.

В евклидовом координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ из прим. 4.1 неравенство (4-6) имеет вид

$$(x_1^2+x_2^2+\;\cdots\;+x_n^2)(y_1^2+y_1^2+\;\cdots\;+y_n^2) \geqslant (x_1y_1+x_1y_1+\;\cdots\;+x_ny_n)^2$$

и называется *неравенством Коши – Буняковского*. Оно справедливо для любых двух наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ и обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти наборы пропорциональны.

[2] см. сл. 1.3 на стр. 21

[1] см. сл. 1.2 на стр. 21

В пространстве непрерывных функций из прим. 4.2 неравенство (4-6) выглядит как

$$\Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_a^b g^2(x)\,dx\Big)\geqslant\Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2$$

и называется *неравенством Шварца*. Оно выполняется для любых двух непрерывных функций f и g и обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти функции отличаются скалярным множителем.

Замечание 4.1 Поскольку $|v\pm w|^2=(v\pm w,v\pm w)=(v,v)\pm 2(v,w)+(w,w)$, скалярное произведение однозначно восстанавливается, если известны длины всех векторов:

$$(v,w)=(|v+w|^2-|v-w|^2)/4=(|v+w|^2-|v|^2-|w|^2)/2\,. \qquad (4\text{-}7)$$

Пример 4.3 (уравнение гиперплоскости)
Для данного ненулевого вектора a в евклидовом пространстве V неоднородное линейное уравнение

$$(a,x)=d\,,\quad a\in V\quad d\in\mathbb{R}\,, \qquad (4\text{-}8)$$

задаёт в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ в ту же сторону, что и конец вектора a, если $d>0$, и в противоположную сторону, если $d<0$.

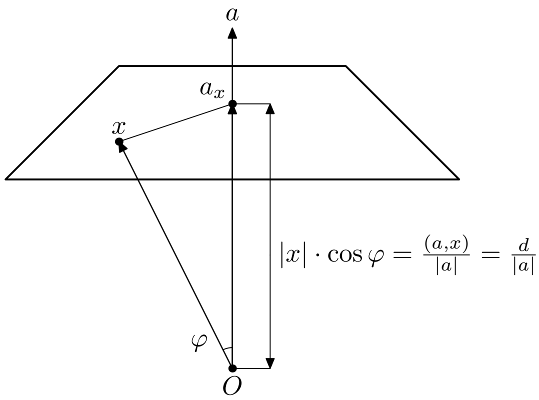

Рис. 4◇1. ГМТ $x:\,(a,x)=d$.

В самом деле, вектор x удовлетворяет (4-8) тогда и только тогда, когда его ортогональная проекция[1] на вектор a равна (см. рис. 4◇1)

$$a_x=a\cdot\frac{(a,x)}{(a,a)}=a\cdot\frac{d}{|a|^2}=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{d}{|a|}\,.$$

Это фиксированный вектор длины $|d|/|a|$, сонаправленный с a при $d>0$ и противоположно направленный к a при $d<0$.

В координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение (4-8) выглядит как

$$a_1x_1+a_2x_2+\,\cdots\,+a_nx_n=d$$

где $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $d\in\mathbb{R}$.

[1] ср. с форм. (1-26) на стр. 20

Упражнение 4.3. Покажите, что расстояние от точки p до гиперплоскости

$$(a, x) = d$$

равно $|d - (a, p)|/|a|$.

Пример 4.4 (срединный перпендикуляр)
Рассмотрим в произвольном аффинном евклидовом пространстве A любую пару различных точек $p_0 \neq p_1$. Покажем, что ГМТ $x \in A$, равноудалённых от p_0 и p_1, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0 p_1}$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$ — середину отрезка $[p_0, p_1]$.

В самом деле, равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений $(\overrightarrow{xp_0}, \overrightarrow{xp_0}) = (\overrightarrow{xp_1}, \overrightarrow{xp_1})$, т. е. равенству

$$(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x) \,,$$

где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно зафиксированной начальной точки $O \in A$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем

$$(p_0, p_0) - 2\,(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2\,(p_1, x)$$

или

$$2\,(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0)\,. \tag{4-9}$$

Это линейное уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0 p_1} = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, поскольку последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1.

Упражнение 4.4. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (4-9).

4.1.2. Ортогонализация. Набор векторов евклидова пространства называют *ортогональным*, если любые два вектора в нём ортогональны друг другу. Ортогональный набор называют *ортонормальным* , если все векторы в нём имеют длину 1.

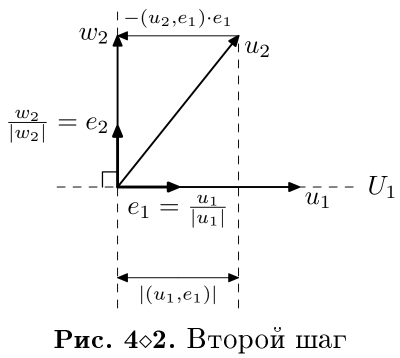

Рис. 4◇2. Второй шаг ортогонализации.

В линейной оболочке любого линейно независимого набора векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ можно выбрать ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ так, чтобы матрица перехода C_{ue} от него к исходному набору была верхнетреугольной, т. е. чтобы каждый базисный вектор e_i лежал в линейной оболочке первых i векторов $u_1, u_2, \ldots, u_i$. Процесс построения такого базиса называется *ортогонализацией Грама – Шмидта* и заключается в следующем.

На первом шагу положим $e_1 = u_1/|u_1|$. Тогда $|e_1| = 1$ и e_1 порождает то же одномерное пространство, что и u_1. Пусть после i шагов нами построены векторы $e_1, e_2, \dots, e_i$, составляющие ортонормальный базис в линейной оболочке первых i векторов $u_1, u_2, \dots, u_i$. Положим (см. рис. 4◇2)

$$w_{i+1} = u_{i+1} - (u_i, e_1) \cdot e_1 - (u_i, e_2) \cdot e_2 - \cdots - (u_i, e_i) \cdot e_i \,. \tag{4-10}$$

Линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$, w_{i+1} совпадает с линейной оболочкой векторов $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}$ (в частности, $e_1, e_2, \dots, e_i$, w_{i+1} линейно независимы), и вектор w_{i+1} ортогонален всем векторам $e_1, e_2, \dots, e_i$, поскольку скалярно умножая обе части равенства (4-10) на e_ν с $1 \leqslant \nu \leqslant i$ и пользуясь ортонормальностью векторов $e_1, e_2, \dots, e_i$ получаем $(w_{i+1}, e_\nu) = (u_{i+1}, e_\nu) - (u_{i+1}, e_\nu)(e_\nu, e_\nu) = 0$ для каждого ν. Полагая $e_{i+1} = w_{i+1}/|w_{i+1}|$, оказываемся в исходном состоянии для $(i+2)$-го шага.

В качестве следствия получаем

Предложение 4.1
В любом евклидовом пространстве существует ортонормальный базис. □

Предложение 4.2
Координатами вектора v в ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ служат скалярные произведения с соответствующими базисными векторами, т. е.

$$v = \sum e_i \cdot (e_i, v) \,.$$

Доказательство. Пусть $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$. Вычисляя скалярное произведение обеих частей с вектором e_i и пользуясь тем, что $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, а $(e_i, e_i) = 1$, получаем $(v, e_i) = x_i$. □

Упражнение 4.5. Пусть векторы u и w имеют в ортонормальном базисе координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ соответственно. Покажите, что

$$(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \,.$$

4.2. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_k) \tag{4-11}$$

евклидова пространства V можно связать таблицу их попарных скалярных произведений

$$G_{uw} \overset{\text{def}}{=} \big((u_i, w_j) \big) \in \mathrm{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R})$$

(в i-той строчке и j-том столбце стоит скалярное произведение (u_i, w_j)). Она называется *матрицей Грама* этих наборов.

Если $w = u$, т. е. речь идёт о таблице умножения векторов из одного и того же набора $u_1, u_2, \ldots, u_m$, мы будем сокращать обозначение G_{uu} до

$$G_u = \big((u_i, u_j)\big) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})\,.$$

Определитель этой квадратной матрицы

$$\Gamma_u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det G_u$$

называется *определителем Грама* векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Отметим, что ортонормальность набора векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ означает, что $G_u = E$, и в этом случае $\Gamma_u = \det E = 1$.

Если наборы векторов (4-11) линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $e = (e_1, e_2, \ldots, e_r)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$, так что

$$u = e\cdot C_{eu} \quad \text{и} \quad w = f\cdot C_{fw}\,,$$

то матрица Грама G_{uw} пересчитывается через матрицу Грама G_{ef} по формуле

$$G_{uw} = C_{eu}^t G_{ef} C_{fw}\ , \tag{4-12}$$

где C_{eu}^t — матрица, транспонированная к матрице перехода C_{eu}. В самом деле, если $C_{eu} = (a_{ij})$, а $C_{fw} = (b_{ij})$, то

$$(u_i, w_j) = \Big(\sum_\alpha a_{\alpha i} e_\alpha\,,\ \sum_\beta b_{\beta j} f_\beta\Big) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha i}\cdot(w_\alpha, w_\beta)\cdot b_{\beta j} =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha}^t\cdot(w_\alpha, w_\beta)\cdot c_{\beta j}\,.$$

При помощи матричных обозначений эту выкладку можно записать компакнее, если условиться понимать под произведением uw векторов $u, w \in V$ их скалярное произведение (v, u). При таком соглашении матрица Грама G_{uw} наборов (4-11) есть произведение столбца векторов u^t на строку векторов w:

$$G_{uw} = u^t w\,.$$

Подставляя в это равенство $u = e\cdot C_{eu}$ и $w = f\cdot C_{fw}$, получаем

$$G_{uw} = u^t w = (eC_{eu})^t\, f\, C_{fw} = C_{eu}^t e^t f\, C_{fw} = C_{eu}^t G_{ef} C_{fw}\,.$$

Из этого вычисления легко получить обобщение предл. 1.3 со стр. 23.

Предложение 4.3

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ образуют базис в подпространстве U, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ составляют в том же подпространстве U ортонормальный базис, то $\Gamma_u = \det^2 C_{eu}$, где C_{eu} — матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов u в базисе e, так что $(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)\cdot C_{eu}$.

Доказательство. Поскольку $G_u = C_{eu}^t G_e C_{eu} = C_{eu}^t E C_{eu} = C_{eu}^t C_{eu}$ и $\det C_{eu} = \det C_{eu}^t$, имеем $\Gamma_u = \det G_u = \det^2 C_{eu}$. □

Следствие 4.1
Определитель Грама любого набора векторов неотрицателен, и его обращение в нуль равносильно линейной зависимости этих векторов.

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_m$ линейно независимы, то они составляют базис в своей линейной оболочке, и по предл. 4.3 $\Gamma_v = \det^2 C_{ev} > 0$. Если векторы v_i линейно зависимы, и $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i, то умножая это равенство скалярно на v_ν, получаем при каждом ν равенство

$$\lambda_1(v_\nu, v_1) + \lambda_2(v_\nu, v_2) + \cdots + \lambda_m(v_\nu, v_m) = 0\,,$$

которое означает, что столбцы матрицы Грама $G_v = ((v_i, v_j))$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Поэтому $\Gamma_v = \det G_v = 0$. □

Следствие 4.2
Все ортонормальные базисы n-мерного евклидова пространства имеют одинаковый по абсолютной величине объём (относительно любой ненулевой формы объёма). Если зафиксировать форму объёма так, чтобы абсолютная величина объёма ортогонального базиса равнялась единице, квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ будет равен определителю Грама Γ_v этих векторов.

Доказательство. Зафиксируем какой-нибудь ортонормальный базис

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

и рассмотрим форму объёма, для которой этот базис имеет объём 1. Тогда квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на произвольные n векторов

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\,,$$

по предл. 4.3 и сл. 4.1 будет равен Γ_v. В частности, квадрат объёма любого ортонормального базиса равен $\det E = 1$. Первое утверждение вытекает из того, что все прочие формы объёма пропорциональны выбранной. □

4.2.1. Ориентация. Ортонормальные базисы, имеющие одинаковый объём, называются *одинаково ориентированными*. Ортонормальные базисы противоположного по знаку объёма называются *противоположно ориентированными*.

Например, нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а чётная — не меняет.

На каждом евклидовом пространстве V имеются ровно две (различающиеся знаком) формы объёма, обладающие тем свойством, что объёмы всех ортонормальных базисов равны ± 1. Выбор одной из них в качестве формы объёма называется *выбором ориентации* на V.

Ориентация координатного пространства $\mathbb{R}^n$, принимающая значение $+1$ на стандартном базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, называется *стандартной*.

4.2.2. Евклидов объём. Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* (неориентированного) параллелепипеда. Мы будем обозначать его $\operatorname{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Согласно сл. 4.2

$$\operatorname{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_v} = \sqrt{\det(v_i, v_j)}\,. \tag{4-13}$$

4.3. Ортогональное проектирование. Рассмотрим в произвольном евклидовом пространстве V любое конечномерное подпространство $U \subset V$ и любой вектор $v \in V$. Непосредственным обобщением предл. 1.1 со стр. 20 является следующее

Предложение 4.4
В подпространстве U существует единственный вектор $u_v \in U$, удовлетворяющий любому из следующих трёх эквивалентных друг другу условий:

1) разность $v - u_v$ перпендикулярна любому вектору из U
2) $\forall\, u \in U \;\; (v, u) = (u_v, u)$
3) $\forall\, u \in U$, отличного от u_v, $|v - u| > |v - u_v|$.

Доказательство. Условия (1) и (2) очевидно равносильны друг другу. Покажем, что (1) $\Rightarrow$ (3). Запишем произвольный отличный от u_v вектор $u \in U$ в виде $u = u_v + w$ с ненулевым $w \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} |v-u|^2 = (v-u, v-u) = \big((v-u_v) - w, (v-u_v) - w\big) = \\ = \big((v-u_v), (v-u_v)\big) + (w,w) = |v-u_v|^2 + |w|^2 > |v-u_v|^2 \end{aligned}$$

что и утверждается в (3). Заметим, что вектор $u_v \in U$, удовлетворяющий условию (3) единственен. Тем самым и вектор $u_v \in U$, удовлетворяющий равносильным между собою условиям (1) и (2), тоже единственен. Остаётся показать, что вектор $u_v \in U$, удовлетворяющий условию (2) существует. Для этого выберем в пространстве U какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ и положим

$$u_v = \sum_{i=1}^{k} e_i \cdot (v, e_i)\,. \tag{4-14}$$

Тогда для любого базисного вектора e_ν выполнено равенство из условия (2):

$$(u_v, e_\nu) = \sum_{i=1}^{k} (e_i, e_\nu) \cdot (v, e_i) = (v, e_\nu)\,.$$

Поскольку условие (2) линейно по u, из того, что оно выполняется для любого базисного вектора $e_\nu \in U$, вытекает, что оно выполняется вообще для любого $u \in U$. □

Определение 4.1
Вектор $u_v \in U$, задаваемый формулой (4-14) и удовлетворяющий условиям предл. 4.4, называется *ортогональной проекцией* вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$. Разность

$$u_v^\perp \overset{\text{def}}{=} v - u_v$$

называется *нормальной составляющей* вектора $v \in V$ относительно подпространства $U \subset V$.

Следствие 4.3
Для любого векторного подпространства U в конечномерном евклидовом пространстве V выполняется равенство

$$V = U \oplus U^\perp\,, \quad \text{где} \quad U^\perp \overset{\text{def}}{=} \{w \in V \mid (u, w) = 0 \;\; \forall\, u \in U\,\}$$

(подпространство $U^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству U в V).

Доказательство. Поскольку $(u, u) \neq 0$ для любого ненулевого u, пересечение $U \cap U^\perp = 0$, т. е. подпространства U и $U^\perp$ трансверсальны. С другой стороны, они порождают V, поскольку по предл. 4.4 каждый вектор $v \in V$ представляется в виде $v = u_v + u_v^\perp$ с $u_v \in U$ и $u_v^\perp \in U^\perp$. □

Следствие 4.4
$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Упражнение 4.6. Покажите, что
а) $U^{\perp\perp} = U$ б) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ в) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

Геометрической переформулировкой предл. 4.4 является следующее

Следствие 4.5
Для любого конечномерного аффинного подпространства Π в произвольном евклидовом аффинном пространстве A и любой точки $a \in A$ существует единственная точка $p_a \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

1) вектор $\overrightarrow{p_a a}$ перпендикулярен любому вектору $\overrightarrow{pq}$ с $p, q \in \Pi$.

2) $|a, q| > |a, p_a|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от p_a

(точка $p_a \in \Pi$ называется *ортогональной проекцией* точки a на подпространство Π).

Доказательство. Выберем в качестве начала координат произвольную точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in A$ с радиус-векторами $\overrightarrow{oa}$ из ассоциированного с A векторного пространства V. При этом аффинное подпространство $\Pi \subset A$ превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in A$ сопоставится её радиус вектор $v = \overrightarrow{oa} \in V$. Остаётся применить к ним предл. 4.4. $\square$

4.3.1. Угол между вектором и подпространством. Неравенство

$$|v - u_v| < |v - u| \quad \forall\, u \in U$$

из свойства (3) предл. 4.4 можно переписать в терминах углов. А именно, если вектор $v \notin U^{\perp}$, то его ортогональная проекция u_v на подпространство U — это единственный с точностью до умножения на положительную константу вектор из подпространства U, на котором достигается минимум углов $\widehat{vu}$ по всем $u \in U$.

В самом деле, наименьшему значению угла $\widehat{vu}$ отвечает наибольшее значение

$$\cos(\widehat{vu}) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|}\,.$$

По свойству (2) из предл. 4.4 $(v, u) = (u_v, u)$. В силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца (4-6) максимум отношения $(u_v, u)/|u| = (u_v, u/|u|)$ достигается на единственном луче: когда единичный вектор $u/|u|$ сонаправлен с u_v.

Угол между вектором $v \notin U^{\perp}$ и его ортогональной проекцией $u_v \in U$ называется *углом между вектором* v *и подпространством* U.

Если $v \in U^{\perp}$, то v перпендикулярен любому $u \in U$.

Пример 4.5 (объём через «площадь основания» и «высоту»)
Рассмотрим в евклидовом пространстве любой набор w из $n + 1$ векторов

$$w = (v,\, u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{4-15}$$

и обозначим через U линейную оболочку последних n векторов

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)\,.$$

Согласно предыдущему, вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = u_v + u_v^{\perp}$, где $u_v \in U$, а $u_v^{\perp}$ перпендикулярен U. Естественно назвать вектор $u_v^{\perp}$ *высотой* параллелепипеда $(v,\, u_1, u_2, \dots, u_n)$, идущей от *основания* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в вершину v.

Покажем, что евклидов (неориентированный) объём параллелепипеда равен произведению «площади основания» на длину опущенной на него высоты:

$$\mathrm{Vol}\,(v,\ u_1, u_2, \dots, u_n) = |u_v^{\perp}| \cdot \mathrm{Vol}\,(u_1, u_2, \dots, u_n)\,. \tag{4-16}$$

Как обычно, удобнее иметь дело с равносильным равенством между определителями Грама:

$$\Gamma_w = |u_v^{\perp}|^2 \cdot \Gamma_u\,,$$

которое получается из (4-16) возведением обеих частей в квадрат. Пусть ортогональная проекция u_v вектора v на подпространство U линейно выражается через порождающие это подпространство векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ как

$$u_v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n\,.$$

Умножая это равенство скалярно на u_j и пользуясь свойством (2) из предл. 4.4 на стр. 75, получаем для каждого j равенство

$$(v, u_j) = (u_v, u_j) = \lambda_1(u_1, u_j) + \lambda_2(u_2, u_j) + \cdots + \lambda_n(u_n, u_j)\,,$$

которое означает, что отнимая из первой строки матрицы Грама G_w набора векторов (4-15) вторую строку, умноженную на λ_1, третью строку, умноженную на λ_2, ... , $(n+1)$-ю строку, умноженную на λ_n, мы получим матрицу, первая строка которой имеет вид

$$\Big(\ (\,v - \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n\,,\ v\,)\,,\ 0\,,\ 0\,,\ \dots\,,\ 0\ \Big)\,.$$

Определитель этой матрицы, с одной стороны, равен $\Gamma_w = \det G_w$, а с другой стороны — произведению верхнего правого углового элемента

$$(\,v - \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n\,,\ v\,) = (v - u_v, v) = (u_v^{\perp}, u_v + u_v^{\perp}) = (u_v^{\perp}, u_v^{\perp}) = |u_v^{\perp}|^2$$

на определитель $n \times n$ подматрицы $G_u = \big((u_i, u_j)\big)$, получающейся из G_w выкидыванием первой строки и первого столбца.

Упражнение 4.7. Покажите, что когда левый верхний угловой элемент a_{11} является единственным ненулевым элементом первой строки матрицы A,

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11}\,,$$

где матрица A_{11} получается из A выкидыванием первой строки и первого столбца.

Итак, $\Gamma_w = |u_v^{\perp}|^2 \cdot \Gamma_u$, что и требовалось.

Пример 4.6 (расстояние и угол между вектором и пространством) Если векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно независимы, то из формулы (4-16) получается следующая формула для расстояния $\varrho(v, U)$ от конца вектора v до подпространства, порождённого *линейно независимыми* векторами $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\varrho(v, U) = |u_v^{\perp}| = \frac{\Gamma_w}{\Gamma_u}\,. \tag{4-17}$$

Поскольку $|u_v^\perp| = |v| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между вектором v и подпространством U, определённый выше, этот угол также выражается через определители Грама:

$$\sin\varphi = \frac{|u_v^\perp|}{|v|} = \frac{\Gamma_w}{|v| \cdot \Gamma_u}\,. \tag{4-18}$$

Пример 4.7 (векторное произведение в $\mathbb{R}^3$)
Зафиксируем в трёхмерном евклидовом векторном пространстве положительно ориентированный ортонормальный базис и запишем ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\,, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\,, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\,,$$

в виде (ср. с формулой форм. (3-11) на стр. 54)

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 =$$
$$= a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1) = (a, [b, c])$$

где мы обозначили через $[b, c]$ вектор с координатами

$$[b, c] \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ -b_1c_3 + b_3c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{4-19}$$

Поскольку $\det(b, b, c) = \det(c, b, c) = 0$, вектор $[b, c]$ перпендикулярен как вектору b, так и вектору c. С другой стороны,

$$(a, [b, c]) = |a| \cdot |[b, c]| \cdot \cos\varphi\,,$$

где φ — ориентированный угол между a и $[b, c]$, и в прим. 4.5 мы видели, что

$$|\det(a, b, c)| = |s(b, c)| \cdot h_a = |s(b, c)| \cdot |a| \cdot |\cos\varphi|$$

где $|s(b, c)|$ это евклидова площадь (неориентированного) параллелограмма, натянутого на b и c, а $h_a = |a| \cdot |\cos\varphi|$ это высота параллелепипеда abc, опущенная из вершины a. Сравнивая две написанные выше формулы, мы заключаем, что длина вектора $[b, c]$ равна площади (неориентированного) параллелограмма, натянутого на b и c, а направлен он так, чтобы ориентированный объём параллелепипеда $[b, c], b, c$ был положителен (т. е. буравчик, направленный вдоль вектора

$[b,c]$ должен *завинчиваться* при вращении от b к c по кратчайшей дуге). Эти свойства доставляют *геометрическое* описание вектора $[b,c]$, не зависящее от выбора ортонормального базиса, который использовался для вычисления его координат в формуле (4-19). Вектор $[b,c]$, перпендикулярный к плоскости bc, имеющий длину $|s(b,c)|$ и направленный по сформулированному выше *правилу буравчика*, называется *векторным произведением* векторов b и c. Отметим, что если векторы b и c пропорциональны, то $[b,c]=0$ по формуле (4-19).

По сложившейся с середины XIX века традиции, многие законы трёхмерной физики принято записывать в терминах векторных произведений. Поэтому векторные произведения прочно вошли в подавляющее большинство нынешних руководств для инженеров и техников.

Пример 4.8 («старшие векторные произведения» в $\mathbb{R}^n$)
В обобщение предыдущего примера сопоставим каждому упорядоченному набору из $(n-1)$ векторов $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве вектор $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$, длина которого равна евклидову объёму неориентированного $(n-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, и который направлен перпендикулярно гиперплоскости, порождённой векторами $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, так чтобы упорядоченный набор из n векторов

$$[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}],\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$$

был положительно ориентирован. Отметим, что если $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ линейно зависимы, то $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]=0$ (ибо имеет нулевую длину).

Таким образом, в $\mathbb{R}^4$ мы определили *тройные произведения* $[v_1, v_2, v_3]$, в $\mathbb{R}^5$ — *четверные произведения* $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ и т. д. Подчеркнём, что никаких парных произведений $[v_1, v_2]$ в $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^5$ мы *не определили*.

Если выписать координаты векторов $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ по столбцам матрицы $C = C_{ev}$ размера $n \times (n-1)$, то координаты вектора $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ можно вычислять по формуле, аналогичной (4-19): i-тая координата $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ равна

$$(-1)^{i-1} \det C_i\,,$$

где C_i — квадратная матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, получающаяся выкидыванием i-той строчки из прямоугольной $n\times(n-1)$-матрицы $C = C_{ev}$. Это сразу вытекает из следующего упражнения, обобщающего упр. 4.7:

Упражнение 4.8 (разложение определителя по строке/столбцу). Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ обозначим через A_{ij} определитель матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, получающейся из матрицы A выкидыванием i-той строчки и j-того столбца. Покажите, что при любом фиксированном i имеет место формула[1]

$$\det A = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{i+\mu} a_{i\mu} \cdot A_{i\mu} = (-1)^{i-1}\left(a_{i1}A_{i1} - a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} - \dots \pm a_{in}A_{in}\right)$$

[1] она называется *разложением определителя по i-той строке*

а при любом фиксированном j — формула[1]

$$\det A = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu+j}a_{\nu j}\cdot A_{\nu j} = (-1)^{j-1}\left(a_{1j}A_{1j} - a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} - \cdots \pm a_{nj}A_{nj}\right)$$

В самом деле, согласно этому упражнению, для любого вектора a выполняется равенство

$$\det(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = a_1\det C_1 - a_2\det C_2 + a_3\det C_3 - \cdots \pm a_n\det C_n = (a, w)\,,$$

где $w = (\det C_1,\ -\det C_2,\ \det C_3,\ ,\ \dots\ ,\ (-1)^{n-1}\det C_n)$ (чтобы убедиться в этом надо разложить стоящий в левой части определитель по первому столбцу). Поэтому заданный таким образом вектор w перпендикулярен каждому из векторов v_i (ибо при $w = v_i$ определитель в левой части зануляется), а его длина $|w| = \mathrm{Vol}\,(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, поскольку согласно формуле из прим. 4.5

$$|\det(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})| = \mathrm{Vol}\,(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})\cdot h_a = \mathrm{Vol}\,(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})\cdot|a|\cdot|\cos\varphi|$$

а с другой стороны $(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = (a, w) = |w|\cdot|a|\cdot\cos\varphi$, где φ в обоих случаях означает угол между a и w. Этот угол острый, если и только если

$$(a, w) = \det(a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) > 0\,,$$

что означает, что набор векторов $a, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ положительно ориентирован и векторы a и w лежат по одну сторону от гиперплоскости, натянутой на $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, т. е. набор $w, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ тоже положительно ориентирован. Таким образом, $w = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$.

Упражнение 4.9. Докажите, что произведение $[v_1, v_2, \dots, v_{n-1}]$ кососимметрично и линейно по каждому из аргументов (при фиксированных остальных).

4.4. Сферы. ГМТ x, удалённых от заданной точки p на заданное расстояние $r > 0$, называется *сферой* радиуса r с центром в p и обозначается

$$S(p, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid (\overrightarrow{px}, \overrightarrow{px}) = r^2\}\,.$$

ГМТ x, удалённых от заданной точки p не далее, чем на заданное расстояние $r > 0$, называется *шаром* радиуса r с центром в p и обозначается

$$B(p, r) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid (\overrightarrow{px}, \overrightarrow{px}) \leqslant r^2\}\,.$$

Предложение 4.5

Пересечение сферы (соотв. шара) радиуса r с центром в p с аффинным подпространством Π, находящимся от точки p на расстоянии ϱ, пусто при $\varrho > r$, состоит из единственной точки — ортогональной проекции точки p на подпространство Π, при $\varrho = r$, а при $\varrho < r$ представляет собою сферу (соотв. шар) радиуса $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ в подпространстве Π с центром в ортогональной проекции точки p на подпространство Π.

[1] она называется *разложением определителя по j-тому столбцу*

Доказательство. Обозначим ортогональную проекцию точки p на подпространство Π через q. Пересечение $S(p,r)\cap\Pi)$ задаётся внутри Π уравнением, которое получается подстановкой $\overrightarrow{px}=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qx}$ в уравнение сферы и имеет вид $(\overrightarrow{qx},\overrightarrow{qx})=r^2-\varrho^2$, откуда всё и следует. □

Упражнение 4.10. Покажите, что сфера с диаметром $[a,b]$ представляет собою геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через точки a и b: $S\big((a+b)/2,|a,b|/2\big)=\{x\mid(\overrightarrow{ax},\overrightarrow{bx})=0\}$.

4.4.1. Касательные. Аффинное подпространство Π, пересекающее сферу $S(p,r)$ в единственной точке $q\in S(p,r)$ называется *касательным* к сфере $S(p,r)$ в точке q. Наибольшее из касательных подпространств — это гиперплоскость, проходящая через точку q перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pq}$. Она называется *касательной гиперплоскостью* к сфере $S(p,r)$ в точке $q\in S(p,r)$ и обозначается

$$T_qS(p,r)=\{x\mid\ (\overrightarrow{pq},\overrightarrow{qx})=0\}=\{x\mid\ (\overrightarrow{pq},\overrightarrow{px})=r^2\}\tag{4-20}$$

(второе описание связано с первым подстановкой $\overrightarrow{qx}=\overrightarrow{px}-\overrightarrow{pq}$).

4.4.2. Степень точки относительно сферы. Число $\deg_{S(p,r)}q\stackrel{\text{def}}{=}|pq|^2-r^2$ называется *степенью* точки q относительно сферы $S(p,r)$. Отметим, что

$$\deg_{S(p,r)}q\begin{cases}<0 & \text{когда } q \text{ лежит внутри шара } B(p,r)\\ =0 & \text{когда } q \text{ лежит на сфере } S(p,r)\\ >0 & \text{когда } q \text{ лежит вне шара } B(p,r)\,.\end{cases}$$

В последнем случае степень точки q относительно сферы $S(p,r)$ есть квадрат длины отрезка касательной, опущенной на сферу из q, заключённого между q и точкой касания.

Предложение 4.6
Пусть точка q имеет степень $d=|pq|^2-r^2$ относительно сферы $S(p,r)$, а прямая ℓ проходит через q и пересекает сферу $S(p,r)$ в точках t_1 и t_2 или касается сферы в точке $t_1=t_2$. Тогда $(\overrightarrow{qt}_1,\overrightarrow{qt}_2)=d$ (в частности, $|qt_1|\cdot|qt_2|=|d|$).

Доказательство. Обозначим через a ортогональную проекцию центра сферы p на прямую ℓ. Согласно упр. 4.10 $\overrightarrow{at}_2=-\overrightarrow{at}_1$. Поэтому

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{qt}_1,\overrightarrow{qt}_2)=(|qa|+|at_1|)\cdot(|qa|-|at_1|)=|qa|^2-|at_1|^2=\\=|pq|^2-|pa|^2-|at_1|^2=|pq|^2-|pt_1|^2=d\end{aligned}$$

□

Упражнение 4.11 (радикальная ось). Покажите, что ГМТ, имеющих равные степени относительно двух данных сфер $S(p_1,r_1)$ и $S(p_2,r_2)$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную линии центров (т. е. прямой (p_1,p_2)).

4.4.3. Поляры. Прямая (q,a), проходящая через точку $q \in S(p,r)$ и произвольную точку $a \neq q$, касается сферы в точке q, если и только если $(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{qa}) = 0$ или, подставляя сюда $\overrightarrow{qa} = \overrightarrow{pq} - \overrightarrow{pa}$, если и только если

$$(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pa}) = r^2 \tag{4-21}$$

Это соотношение, рассматриваемое как линейное неоднородное уравнение на a при фиксированном $q \in S(p,r)$, задаёт касательную гиперплоскость $T_qS(p,r)$ из (4-20). Если же воспринимать (4-21) как уравнение на q при фиксированном $a \neq p$, то оно задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{pa}$ и пересекающую прямую (pa) в точке

$$b = p + \frac{r^2}{|pa|} \cdot \overrightarrow{pa}\,,$$

удалённой от p на расстояние $r^2/|pa|$ в сторону точки a.

Точки a и b называются в этом случае *инверсными* относительно сферы $S(p,r)$, а гиперплоскость, задаваемая уравнением (4-21), рассматриваемым как уравнение на q, называется *полярной гиперплоскостью* (или *полярой*) точки a относительно сферы $S(p,r)$. Точка a называется *полюсом* этой гиперплоскости.

Говоря геометрически, инверсность точек a и b относительно сферы при

$$|pb| \leqslant r \leqslant |pa|$$

означает, что ГМТ касания со сферой всевозможных касательных, проведённых из точки a, высекается из сферы гиперплоскостью, проходящей через b перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pb}$. Отметим, что точки, лежащие на сфере, характеризуются в этих терминах как точки, инверсные самим себе, или, что то же самое, как точки, лежащие на своих полярах. Отметим также, что шар без граничной сферы и центра

$$B(p,r) \smallsetminus \big(p \sqcup S(p,r)\big)$$

можно охарактеризовать как ГМТ, поляры которых не пересекают сферы.

Предложение 4.7 (полярная двойственность)
Для любых точек x и y, отличных от центра сферы, точка x лежит на поляре точки y тогда и только тогда, когда точка y лежит на поляре точки x.

Доказательство. Оба условия записываются одним и тем же уравнением (4-21)

$$(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{py}) = r^2\,.$$

$\square$

Определение 4.2 (инверсия)
Отображение $\sigma_{p,r} : \mathbb{R}^n \smallsetminus p \longrightarrow \mathbb{R}^n \smallsetminus p$, переводящее каждую отличную от p точку $a \in \mathbb{R}^n$ в инверсную ей относительно сферы $S(p,r)$ точку

$$\sigma_{p,r}(a) = p + \frac{r^2}{|pa|} \cdot \overrightarrow{pa}\,,$$

называется *инверсией* относительно сферы $S(p,r)$.

4.4.4. Некоторые свойства инверсии. Из сказанного выше вытекает, что инверсия $\sigma_{p,r}$ является инволюцией[2] на множестве всех точек, отличных от центра p сферы, и сфера $S(p,r)$ есть множество неподвижных точек инверсии $\sigma_{p,r}$.

Инверсия переводит в себя каждое аффинное подпространство Π, проходящее через центр сферы, и действует на нём как инверсия относительно сферы $\Pi \cap S(p,r)$, высекаемой исходной сферой на этом подпространстве.

Пусть точки a и b переводятся друг в друга инверсией $\sigma_{p,r}$. Из полярной двойственности (см. предл. 4.7) следует, что в этом случае всякая точка x, для которой угол pax прямой (т. е. всякая точка полярной к b гиперплоскости) переходит в точку x', для которой угол $px'b$ прямой (ибо b лежит на поляре точки x). Иначе говоря, гиперплоскость $\Pi(a, \overrightarrow{pa})$, проходящая через точку a перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pa}$, переводится инверсией $\sigma_{p,r}$ в сферу с диаметром $[p,b]$.

Поскольку инверсия $\sigma_{p,r}$ обратна самой себе, то и наоборот, любая проходящая через p сфера с диаметром $[p,a]$ перейдёт при инверсии в полярную точке a гиперплоскость, проходящую через $b = \sigma_{p,r}(a)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pb}$.

Упражнение 4.12. Покажите, что не проходящая через p сфера с коллинеарным p диаметром $[a_1,a_2]$ перейдёт при инверсии в сферу с инверсным диаметром $[b_1,b_2]$ (здесь $b_1 = \sigma_{p,r}(a_1)$ и $b_2 = \sigma_{p,r}(a_2)$).

4.4.5. Описанная сфера симплекса. Пусть точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ n-мерного евклидова пространства не лежат в одной гиперплоскости. Тогда существует единственная точка c, равноудалённая от всех точек p_i. Она называется центром описанного шара симплекса

$$[p_0, p_1, \dots, p_n]\,.$$

В самом деле, ГМТ равноудалённых от всех точек p_i представляет собою пересечение n аффинных гиперплоскостей — срединных перпендикуляров к n отрезкам $[p_0,p_i]$ с $1 \leqslant i \leqslant n$. Это пересечение задаётся системой из n линейных неоднородных уравнений (4-9)

$$(\overrightarrow{p_0p_i}, x) = \frac{(p_i,p_i) - (p_0,p_0)}{2}$$

[2]т. е. обратной самой себе биекцией

на n-мерный вектор x. Поскольку векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$ линейно независимы, линейные формы $x \mapsto (\overrightarrow{p_0p_i}, x)$, стоящие в левых частях этих уравнений, также линейно независимы. В прим. 3.1 мы видели, что в этом случае система имеет единственное решение *при любом* выборе констант, стоящих в правых частях.

Таким образом, искомая точка $x = c$ существует и единственна. Более того, при помощи правила Крамера можно написать явные формулы как для центра c, так и для радиуса $r = |cp_i|$ сферы, проходящей через точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ (ср. с задачей Г4◇10* из 4-го листка).

4.5. Евклидова двойственность. Каждое евклидово пространство V можно линейно отобразить в двойственное пространство V^*, сопоставляя вектору $u \in V$ в линейную форму $g_u : w \mapsto (w, u)$ скалярного умножения на этот вектор. Получающееся таким образом линейное отображение

$$g : V \xrightarrow{u \mapsto (\,*\,,u\,)} V^* \tag{4-22}$$

инъективно: для любого $v \neq 0$ функционал $g_v \in V^*$ принимает ненулевое значение на векторе v

$$g_v(v) = (v, v) > 0$$

и, следовательно, ненулевой. Таким образом, если пространство V конечномерно, то отображение (4-22) является изоморфизмом. Это означает, что любой линейной формы $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V существует единственный вектор $v_\varphi \in V$, такой что $\forall\, w \in V \quad \varphi(w) = (v_\varphi, w)$.

Упражнение 4.13. Убедитесь, что матрица G_{e^*e} отображения g в произвольном базисе e пространства V и двойственном ему базисе e^* пространства V^* совпадает с матрицей Грама G_e.

Пример 4.9 (решение упр. 4.6)
При изоморфизме (4-22) ортогональное дополнение $U^\perp$ к подпространству $U \subset V$ изоморфно отображается на аннулятор $\operatorname{Ann} U \subset V^*$ этого подпространства. Поэтому все утверждения упр. 4.13 немедленно вытекают из установленных в теор. 2.1 на стр. 42 свойств аннуляторов.

4.5.1. Двойственный базис. Согласно предыдущему, для любого базиса

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

пространства V координатные функционалы $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in V^*$, составляющие двойственный базис в V^*, также представляются скалярными произведениями с некоторыми векторами $e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee \in V$, которые однозначно определяются из соотношений

$$(e_i^\vee, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j\,, \\ 1, & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{4-23}$$

Базис $e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee$ пространства V называется *евклидово двойственным* к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Например, евклидово двойственным к ортонормальному базису будет он сам, а евклидово двойственным к ортогональному базису $\{e_i\}$ будет базис из векторов $\{e_i/(e_i, e_i)\}$.

По упр. 4.13, координаты векторов двойственного базиса $e_i^\vee$ в исходном базисе e_i суть столбцы матрицы $G^{-1}_{e_1,e_2,\dots,e_n}$, обратной к матрице Грама $G_{e_1,e_2,\dots,e_n}$ исходного базиса:

$$e^\vee = e\, G_e^{-1} \,. \tag{4-24}$$

Упражнение 4.14. Проверьте это, и покажите, что $e_i^{\vee\vee} = e_i$.

Коэффициенты разложения произвольного вектора $v \in V$ по любому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ суть скалярные произведения с векторами двойственного базиса:

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\vee) \tag{4-25}$$

(чтобы убедиться в этом, достаточно скалярно умножить обе части на $e_i^\vee$ для каждого i).

Пример 4.10 (вычисление ортогональной проекции)

Ортогональную проекцию u_v данного вектора v на линейную оболочку U произвольно заданных линейно независимых векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$ можно вычислить не прибегая к ортогонализации этих векторов следующим образом. Сначала по формуле (4-24) построим в подпространстве U базис

$$(u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee) = (u_1, u_2, \dots, u_m) \cdot G_u^{-1} \,,$$

евклидово двойственный заданному базису $u_1, u_2, \dots, u_n$. Теперь искомая ортогональная проекция выражается через этот базис по формуле

$$u_v = \sum_{i=1}^m u_i^\vee \cdot (u_i, v) = u_1^\vee \cdot (u_1, v) + u_2^\vee \cdot (u_2, v) + \ \cdots \ + u_m^\vee \cdot (u_m, v) \,.$$

В самом деле, скалярно умножая обе части на u_ν, мы заключаем, что

$$(u_\nu, u_v) = (u_\nu, v)$$

для всех ν. Но тогда $(u, u_v) = (u, v)$ для всех $u \in U$, что и требуется.