§3. Объёмы, определители, матрицы

3.1. Объём ориентированного n-мерного параллелепипеда. Геометрическим критерием линейной зависимости набора векторов

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

в n-мерном векторном пространстве V является обращение в нуль *объёма n-мерного параллелепипеда*, натянутого на эти векторы так, что они образуют n рёбер, исходящих из одной вершины параллелепипеда, как на рис. 3◇1.

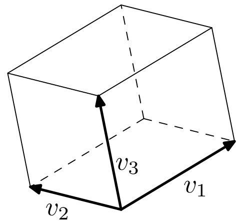

Рис. 3◇1.

Определение 3.1

Функция $\omega : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \Bbbk$, сопоставляющая каждому упорядоченному набору векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ n-мерного векторного пространства V число $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Bbbk$, называется *формой объёма* (или просто *объёмом*) на пространстве V, если она удовлетворяет следующим двум свойствам:

1) при добавлений к одному из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента объём не меняется:

$$\omega\,(\,\dots\,,\,v_i + \lambda v_j,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,) = \omega\,(\,\dots\,,\,v_i,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,)$$

2) при умножении одного из аргументов на число объём умножается на это число: $\omega(\,\dots\,,\,\lambda v_i,\,\dots) = \lambda\,\omega(\,\dots\,,\,v_i,\,\dots)$

(в обеих формулах все отмеченные многоточиями аргументы в левой и в правой части равенства остаются без изменений).

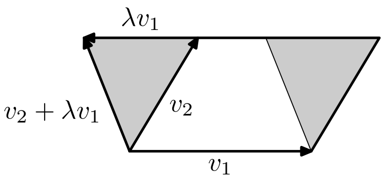

Рис. 3◇2.

Геометрический смысл этих требований дословно тот же, что и при определении площади параллелограмма на плоскости[1]: первое означает, что объём не меняется при «параллельном перекосе» параллелепипеда в плоскости любой его двумерной грани вдоль любой из сторон, как на рис. 3◇2 (где нарисована двумерная проекция параллелепипеда на плоскость двумерной грани, натянутой на рёбра v_1, v_2 вдоль всех остальных рёбер); второе означает, что при растяжении одной из сторон параллелепипеда в λ раз объём умножается на λ. Более того, дословно так же, как и лем. 1.3 на стр. 12, доказывается

Лемма 3.1

На любом векторном пространстве размерности n над произвольным полем $\Bbbk$ форма n-мерного объёма автоматически кососимметрична[1]:

$$\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)\,, \tag{3-1}$$

[1] ср. с n° 1.3 на стр. 11

[1] т. е. меняет знак при перестановке любых двух аргументов местами

линейна каждому из аргументов при фиксированных остальных аргументах:

$$\omega(\dots, \lambda v + \mu w, \dots) = \lambda\,\omega(\dots, v, \dots) + \mu\,\omega(\dots, w, \dots) \tag{3-2}$$

и обращается в нуль, если аргументы линейно зависимы.

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, так что, скажем, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, то

$$\begin{aligned}\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega(v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \\ &= \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0\cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0\cdot\omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0\,.\end{aligned}$$

Это доказывает последнее утверждение. Отметим, что из него вытекает, в частности, что объём обращается в нуль, если какие-то два аргумента совпадают или если один из аргументов нулевой.

Соотношение (3-1) проверяется той же выкладкой, что и на стр. 12:

$$\begin{aligned}\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) &= \omega(\dots, v + w, \dots, w, \dots) = \\ &= \omega(\dots, v + w, \dots, -v, \dots) = \omega(\dots, w, \dots, -v, \dots) = \\ &= -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)\,.\end{aligned}$$

Для доказательства (3-2) заметим, что если оба набора аргументов в правой части (3-2) линейно зависимы, то набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и стало быть, обе части равенства нулевые. Поэтому мы можем без ограничения общности считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства V. Выразив w через этот базис, мы представим его в виде $w = \varrho v + u$, где u является линейной комбинацией остальных $(n-1)$ аргументов. По первому свойству объёма левая часть (3-2) равна

$$\omega(\dots, \lambda v + \mu w, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)v + \mu u, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu\varrho)v, \dots)\,,$$

а второе слагаемое правой части (3-2) равно

$$\mu\omega(\dots, w, \dots) = \mu\omega(\dots, \varrho v + u, \dots) = \mu\omega(\dots, \varrho v, \dots)\,.$$

Тем самым, по второму свойству объёма, правая часть

$$\lambda\omega(\dots, v, \dots) + \mu\omega(\dots, \varrho v, \dots) = (\lambda + \varrho\mu)\,\omega(\dots, v, \dots)$$

совпадает с левой. □

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.1
На каждом n-мерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма

n-мерного объёма ω. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис V, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$, линейно выражающихся через базис по формулам

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot c_{ij} = e_1 \cdot c_{1j} + e_2 \cdot c_{2j} + \dots + e_n \cdot c_{nj}\,, \quad \text{где } c_{ij} \in \Bbbk\,, \tag{3-3}$$

то объём параллелепипеда, натянутого на $v_1, v_2, \dots, v_n$, выражается через объём базисного параллелепипеда по формуле

$$\begin{gathered} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det(c_{ij})\,, \quad \text{где} \\ \det(c_{ij}) = \sum_{(g_1, g_2, \dots, g_n)} \operatorname{sgn}(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \end{gathered} \tag{3-4}$$

(суммирование происходит по всем *перестановкам* $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ множества индексов $\{1, 2, \dots, n\}$, и $\operatorname{sgn}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \pm 1$ обозначает *знак* такой перестановки[1]). $\square$

Эта теорема является следствием нескольких замечательных явлений, которые мы обсудим в разделах n° 3.2 – n° 3.3 ниже. Начнём мы с доказательства единственности формы объёма и объяснения формулы (3-4). Существование объёма будет установлено в n° 3.3.1.

3.1.1. Единственность формы объёма. Допустим, что форма объёма ω существует, зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и покажем, что $\omega(v_1, v_2, \dots, v_m)$ вычисляется по формуле (3-4). Для этого подставим в $\omega(v_1, v_2, \dots, v_m)$ вместо каждого из аргументов его разложение (3-3). В силу линейности объёма по каждому из аргументов, получаем

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega\Big(\sum_{i_1} c_{i_1 1} e_{i_1}\,, \sum_{i_2} c_{i_2 2} e_{i_2}\,, \dots, \sum_{i_n} c_{i_n n} e_{i_n}\Big) = \\ = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \dots \cdot c_{i_n n} \cdot \omega\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right). \end{aligned}$$

Так как при совпадении двух аргументов объём обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму дают только наборы $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, в которых каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ встречается ровно один раз, т. е. наборы, получающиеся из набора $(1, 2, \dots, n)$ всевозможными перестановками его элементов. При этом

$$\omega\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right) = \pm\, \omega(e_1, e_2, \dots, e_n)\,,$$

где знак определяется тем, сколько аргументов придётся поменять местами для того, чтобы перейти от набора $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ к набору $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что каждую перестановку аргументов

$$(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

[1] равный $+1$, если перестановка *чётная* и -1, если перестановка *нечётная*, см. n° 3.2 ниже

можно получить из исходного набора аргументов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ конечным числом *транспозиций* — элементарных перестановок аргументов, при которых ровно два аргумента меняются друг с другом местами, а все остальные аргументы остаются на месте.

При каждой транспозиции аргументов форма ω меняет знак. Если набор аргументов $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m})$ можно получить из $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ чётным количеством транспозиций, то $\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}) = \omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, а если нечётным — то $\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}) = -\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Возникает естественный вопрос: может ли одна и та же перестановка аргументов получиться из исходного набора аргументов как чётным, так и нечётным количеством транспозиций? Если такая перестановка существует, то значение $\omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ обязано равняться нулю, и формула (3-4) означает тогда, что форма ω тождественно обращается в нуль на каждом наборе векторов. Если же множества чётных и нечётных перестановок не пересекаются, то полагая по определению

$$\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \begin{cases} +1 & \text{, если перестановка } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ чётна} \\ -1 & \text{, если перестановка } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ нечётна} \end{cases}$$

мы получаем требуемую формулу (3-4).

Для ответа на поставленный вопрос целесообразно взглянуть на множество перестановок с несколько иной точки зрения.

3.2. Отступление о чётности перестановок. Каждую перестановку

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \tag{3-5}$$

чисел 1, 2, ..., n можно воспринимать как взаимно однозначное отображение

$$g : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{i \mapsto g_i} \{1, 2, \ldots, n\}$$

из множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя, переводящее элемент $i \in X_n$ в i-тый слева элемент $g_i = g(i)$ последовательности (3-5). Например, перестановка

$$(2, 4, 3, 5, 1)$$

чисел 1, 2, 3, 4, 5 соответствует таким образом отображению множества этих чисел в себя, действующему по правилу

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 3, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 1.$$

Взаимно однозначные отображения множества X_n в себя образуют группу[2], которая называется *группой перестановок n элементов* (или *n-той симметрической группой*) и обозначается S_n.

[2] в смысле опр. 0.1 на стр. 4

Для любых двух перестановок $f, g \in S_n$ обозначим через fg их композицию, действующую по правилу $i \mapsto f(g(i)$. Например, две возможных композиции перестановок $f = (2,4,3,5,1)$ и $g = (3,2,1,5,4)$ из группы S_5 имеют вид $fg = (3,4,2,1,5)$ и $gf = (2,5,1,4,3)$.

Перестановку, которая меняет между собою местами какие-нибудь два элемента i и j, а все остальные элементы $k \neq i, j$ оставляет на месте, будем, как и выше, называть *транспозицией* элементов i и j и обозначать σ_{ij}.

Упражнение 3.2 (переформулировка упр. 3.1). Убедитесь, что каждая перестановка является композицией транспозиций.

Перестановки, представимые в виде композиции чётного числа транспозиций, называются *чётными*, а перестановки, раскладывающиеся в композицию нечётного числа транспозиций — *нечётными*.

Отметим, что каждая перестановка имеет *много различных* разложений в композицию транспозиций. Например, перестановку $(3,2,1) \in S_3$ можно получить как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ и как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Поэтому не очевидно, что множества чётных и нечётных перестановок не пересекаются. Чтобы доказать это, мы укажем такой способ определения чётности перестановки, который не использует разложения этой перестановки в композицию транспозиций.

Назовём упорядоченную пару чисел (i, j), в которой $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *инверсной парой* перестановки $g \in S_n$, если $g(i) > g(j)$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ пар (i, j) с $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Это разбиение зависит только от g и «вообще ничего не знет» про разложения g в произведения транспозиций.

Лемма 3.2
Чётность числа инверсных пар каждой перестановки совпадает с чётностью количества транспозиций, на которые её можно разложить.

Доказательство. Для начала проверим, что для любой перестановки g и любой транспозиции σ_{ij} чётность числа инверсных пар у перестановок g и $\sigma_{ij}g$ различна. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_i}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_j}, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ \sigma_{ij}g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_j}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \boldsymbol{g_i}, g_{j+1}, \dots, g_n)\,. \end{aligned} \tag{3-6}$$

отличаются друг от друга перестановкой между собою элементов $g_i = g(i)$ и $g_j = g(j)$, стоящих на i-том и j-том местах. То, что чётность числа инверсных пар у этих двух перестановок различна, вытекает из следующего упражнения:

Упражнение 3.3. Проверьте, что у двух перестановок (3-6) пара (i, j), а также $2(j-i-1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность[1], а инверсность всех остальных пар одинакова.

[1] т. е. если такая пара инверсна в g, то она не инверсна в $\sigma_{ij}g$ и наоборот

Таким образом, если перестановка g разложена в композицию транспозиций, то чётность числа инверсных пар в ней отличается от чётности числа инверсных пар в тождественной перестановке (т. е. от нуля) в точности на чётность количества транспозиций, в которую разложилась g. $\square$

Следствие 3.1 (знак перестановки)
Существует единственное *отображение знака* $\mathrm{sgn} : S_n \twoheadrightarrow \{+1, -1\}$ со свойствами: $\mathrm{sgn}(fg) = \mathrm{sgn}(f) \cdot \mathrm{sgn}(g)$ для любых перестановок $f, g \in S_n$, $\mathrm{sgn}(\sigma_{ij}) = -1$ для любой транспозиции $\sigma_{ij} \in S_n$ и $\mathrm{sgn}(\mathrm{Id}) = 1$, где Id — тождественная перестановка, оставляющая каждый элемент на месте.

Доказательство. Так как любая перестановка является произведением транспозиций, знак всех чётных перестановок должен быть равен $+1$, а знак всех нечётных -1. Поскольку множества чётных и нечётных перестановок не пересекаются, это правило корректно определяет отображение из S_n в множество знаков. Соотношение $\mathrm{sgn}(fg) = \mathrm{sgn}(f) \cdot \mathrm{sgn}(g)$ вытекает из того, что композиция перестановок одинаковой чётности чётна, а противоположной чётности — нечётна. $\square$

3.2.1. Правило ниточек для вычисления знака перестановки. Интерпретация чётности перестановки как чётности числа инверсных пар даёт практический способ отыскания чётности перестановки — возможно, не самый быстрый[0], но всё же полезный в некоторых ситуациях, с которыми мы далее столкнёмся.

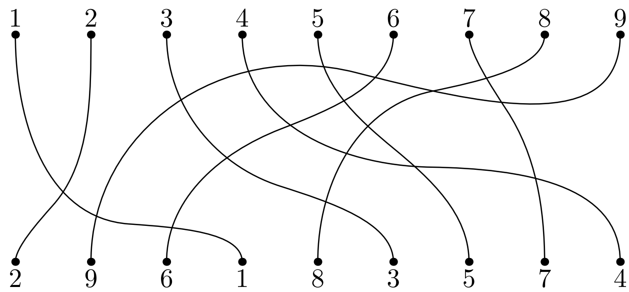

Рис. 3◇3. $\mathrm{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений)

Напишем друг под другом исходные числа $1, 2, \dots, n$ и их перестановку $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, после чего соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы четырёхугольника $1\, n\, g_n\, g_1$ (см. рис. 3◇3) и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[0]. Тогда чётность числа инверсных пар будет равна чётности числа точек пересечения нитей.

[0]в курсе алгебры будут предъявлены другие способы отыскания знака — например, можно разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны

[0]это означает, что в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём пересечение происходит трансверсально: ╳, а не по касательной:)(

Упражнение 3.4. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей перестановки* $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

3.3. Определители. Из результатов n° 3.1.1 и n° 3.2 вытекает, что если форма объёма существует, то она однозначно задаётся своим значением на произвольно зафиксированном базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V и вычисляется по формуле (3-4):

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \,. \tag{3-7}$$

В частности, любые две ненулевые формы объёма ω_1, ω_2 различаются постоянным множителем — отношением $\omega_1(e_1, e_2, \dots, e_n)/\omega_2(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Сумма в правой части равенства (3-7) называется *определителем* $n \times n$-матрицы $C = (c_{ij})$ или векторов v_j, координаты которых стоят по столбцам матрицы C и обозначается через

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det\,(c_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \tag{3-8}$$

Написано тут следующее. Будем всеми возможными способами выбирать n элементов в матрице C так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Тогда множество клеток, в которых стоят выбранные элементы, представляет собою график биективного отображения $j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк. Выбранные элементы перемножаются и произведению приписывается знак, равный знаку перестановки $j \mapsto g_j$. Полученные таким образом $n!$ произведений со знаками складываются. Так, определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{3-9}$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \tag{3-10}$$

$$- c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \tag{3-11}$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции). Из приведённого описания вытекает

Предложение 3.1
$\det C = \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ линеен по каждому столбцу матрицы C:

$$\det(\dots,\, \lambda u + \mu w,\, \dots) = \lambda \cdot \det(\dots,\, u,\, \dots) + \mu \cdot \det(\dots,\, w,\, \dots)$$

(обозначенные многоточиями столбцы остаются без изменения) и не меняется при замене матрицы $C = (c_{ij})$ на *транспонированную* матрицу[0] $C^t = \left(c^t_{ij}\right)$, имеющую $c^t_{ij} = c_{ji}$:

$$\det C^t = \det C\,.$$

При перестановке столбцов матрицы C определитель умножается на знак этой перестановки.

Доказательство. Каждое из складываемых в формуле (3-8) произведений содержит ровно по одному сомножителю из каждого столбца и, стало быть, линейно по каждому столбцу. Поэтому линейна и их сумма. Это доказывает первое утверждение.

Равенство $\det C^t = \det C$ вытекает из того, что набор произведений n-ок матричных элементов, которые надо сложить, чтобы получить $\det C$ и $\det C^t$, одинаков, а знаки, с которыми каждое из этих произведений входит в $\det C$ и $\det C^t$, суть знаки взаимно обратных отображений между номерами строк и номерами столбцов матрицы C, графики которых — это клетки матрицы, содержащие выбранные элементы. Поскольку обратные друг другу перестановки имеют одинаковый знак, разложения (3-8) для $\det C$ и $\det C^t$ состоят из одних и тех же слагаемых с одними и теми же знаками.

Упражнение 3.5. Покажите, что взятие обратного отображения $g \mapsto g^{-1}$ является биективным отображением из S_n в S_n и не меняет знаков перестановок.

Вероятно, любители алгебраических формул предпочтут предыдущему словестному рассуждению выкладку

$$\det C^t = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\cdot c^t_{g(1),1}c^t_{g(2),2}\cdots c^t_{g(n),n} = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\cdot c_{1,g(1)}c_{2,g(2)}\cdots c_{n,g(n)} =$$
$$= \sum_{h\in S_n} \operatorname{sgn}(h^{-1})\cdot c_{h(1),1}c_{h(2),2}\cdots c_{h(n),n} = \sum_{h\in S_n} \operatorname{sgn}(h)\cdot c_{h(1),1}c_{h(2),2}\cdots c_{h(n),n} = \det C$$

(переход от первой строки ко второй состоит в подстановке $h = g^{-1}$; допустимость такой замены параметра суммирования и предпоследнее равенство в третьей строчке следуют из упр. 3.5).

Последнее утверждение предложения проверяется похожей выкладкой с учётом следующего наблюдения, аналогичного упр. 3.5:

Упражнение 3.6. Покажите, что взятие композиции с фиксированной перестановкой $h \in S_n$: $g \mapsto gh$ является биективным отображением из S_n в S_n и умножает знак всех перестановок на знак перестановки h.

[0]матрица C^t получается из C отражением относительно диагонали, соединяющей левую верхнюю клетку $(1,1)$ с правой нижней клеткой (n,n), или, что то же самое, записью столбцов матрицы C по строкам матрицы C^t

А именно, пусть матрица C' получается применением перестановки h к столбцам матрицы C. Тогда

$$\det C' = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\cdot c'_{g(1),1}c'_{g(2),2}\cdots c'_{g(n),n} =$$
$$= \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\cdot c_{gh(1),1}c_{gh(2),2}\cdots c_{gh(n),n} = \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(fh^{-1})\cdot c_{f(1),1}c_{f(2),2}\cdots c_{f-1(n),n} =$$
$$= \operatorname{sgn}(h^{-1}) \sum_{f\in S_n} \operatorname{sgn}(f)\cdot c_{f(1),1}c_{f(2),2}\cdots c_{f(n),n} = \operatorname{sgn}(h)\cdot \det C$$

(равенство во второй строке состоит в подстановке $f = gh$; допустимость такой замены и последующие два равенства следуют из упр. 3.6 и упр. 3.5). $\square$

Замечание 3.1 Инвариантность определителя относительно транспонирования матрицы означает, что свойства определителя как функции от строк матрицы дословно такие же, что и свойства определителя как функции от столбцов матрицы. В частности, определитель линеен по каждой строке (при фиксированных остальных) и при перестановке строк умножается на знак этой перестановки. Таким образом, определитель является кососимметричной функцией как от столбцов, так и от строк матрицы. В частности, он обращается в нуль, если строки или столбцы матрицы линейно зависимы (например, когда у матрицы есть совпадающие строки или нулевая строка).

Упражнение 3.7. Покажите что строки квадратной матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда когда линейно зависимы её столбцы.

3.3.1. Доказательство существования ненулевой формы объёма. Зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, положим

$$\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

и продолжим форму ω на произвольные наборы векторов по формуле (3-4):

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det\left(c_{ij}\right) ,$$

где (c_{ij}) — квадратная матрица размера $n\times n$, в i-том столбце которой записаны координаты вектора v_i в зафиксированном нами базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Из предл. 3.1 вытекает, что построенная таким образом форма ω кососимметрична и линейна по каждому аргументу. Поэтому

$$\omega(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda\,\omega(\dots, v_i, \dots)$$

и

$$\omega\left(\dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, \right) =$$
$$= \omega\left(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots, \right) + \lambda\,\omega\left(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots, \right) =$$
$$= \omega\left(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots, \right) ,$$

что и требуется в опр. 3.1. Это завершает доказательство теор. 3.1.

3.3.2. Правило Крамера. Зафиксируем в пространстве V некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и форму объёма ω, для которой этот базис имеет единичный объём. Для каждого набора из n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ обозначим через

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

определитель матрицы, в i-том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора v_i по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Непосредственным обобщением лем. 1.2 со стр. 10 является

Предложение 3.2
Векторы $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ тогда и только тогда составляют базис пространства V, когда $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, и в этом случае коэффициенты разложения

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

произвольного вектора $w \in V$ по базису $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ вычисляются по *правилу Крамера*:

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

Доказательство. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ не образуют базиса, то по сл. 2.2 они должны быть линейно зависимы. В доказательстве лем. 3.1 мы видели, что в этом случае $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$. Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ образуют базис, то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$, т. к. в противном случае объём $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)$ также был бы равен нулю, поскольку по теор. 3.1

$$\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \det D,$$

где матрица D имеет в качестве i-того столбца коэффициенты разложения вектора e_i по базису $v_1, v_2, \dots, v_n$. Это доказывает первое утверждение предложения. Для доказательства правила Крамера вычислим

$$\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

пользуясь разложением $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$, линейностью определителя и тем, что определитель обращается в нуль, если какие-нибудь два столбца совпадают друг с другом. Получаем

$$\begin{aligned} &\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &\quad = \det(v_1, \dots, v_{i-1}, x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &\quad = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \cdot \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_\nu, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &\quad = x_i \cdot \det(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Пример 3.1 (альтернатива Фредгольма)
На языке систем из n линейных неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3-12}$$

на n переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ предл. 3.2 означает следующую альтернативу: либо система (3-12) с фиксированными левыми частями имеет единственное решение при любых значениях правых частей, либо система однородных уравнений, возникающих, когда все $b_i = 0$, обладает ненулевым решением.

В самом деле, всякое решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы (3-12) доставляет набор коэффициентов линейного выражения вектора-столбца

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \Bbbk^n$$

через векторы – столбцы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрицы (a_{ij}) :

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \Bbbk^n .$$

Если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют в $\Bbbk^n$ базис, то любой вектор b раскладывается по ним единственным образом. В противном случае векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависимы.

Отметим, что правило Крамера даёт явные формулы для отыскания решений системы (3-12) в случае, когда такое решение единственно.

Пример 3.2 (уравнение гиперплоскости)
Пусть n точек $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ аффинного пространства, ассоциированного с n-мерным координатным векторным пространством V, не лежат в одном $(k-2)$-мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 2.9 через них проходит единственная гиперплоскость, и точка x лежит в этой гиперплоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overrightarrow{p_n p_1}, \overrightarrow{p_n p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n p_{n-1}}$, что в свою очередь равносильно равенству

$$\det\left(x - p_n,\, p_1 - p_n,\, p_2 - p_n, \ldots ,\, p_{n-1} - p_n\right) = 0 .$$

В силу полилинейности определителя, это уравнение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x, которое можно переписать как

$$\det(x,\, p_1 - p_n,\, p_2 - p_n, \dots ,\, p_{n-1} - p_n) = \det(p_n,\, p_1,\, p_2, \dots ,\, p_{n-1}) \,.$$

Например, аффинная плоскость $p + \lambda u + \mu v$ в координатном пространстве $\mathbb{k}^3$ (точка p и векторы u, v фиксированы, а параметры λ, μ пробегают $\mathbb{k}$) задаётся неоднородным линейным уравнением

$$\det(x, u, v) = \det(p, u, v)\,.$$

3.4. Матрицы переходов. Пусть заданы два набора векторов

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)\,, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

и каждый из векторов u_j линейно выражается через векторы w_i как

$$u_j = \sum_{\nu=1}^{m} w_\nu \cdot a_{\nu j} = w_1 \cdot a_{1j} + w_2 \cdot a_{2j} + \dots + w_m \cdot a_{mj}\,.$$

В этой ситуации n-столбцовая матрица, j-тый столбец которой состоит из m коэффициентов написанного выше линейного выражения вектора u_j через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ обозначается через

$$C_{wu} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3-13}$$

и называется *матрицей перехода* от векторов u к векторам w.

Если имеется ещё один набор векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$, линейно выражающийся через векторы u_j посредством матрицы перехода $C_{uv} = (b_{ij})$, так что

$$v_j = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \cdot b_{\nu j} = u_1 \cdot b_{1j} + u_2 \cdot b_{2j} + \dots + u_n \cdot b_{nj}\,,$$

то матрица перехода $C_{wv} = (c_{ij})$ от векторов v к векторам w имеет размер $m \times k$ и

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}\,.$$

В самом деле,

$$v_j = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \cdot b_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot a_{i\nu} b_{\nu j} u_\nu = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}\,.$$

Матрицу перехода C_{wv} от v к w называют *произведением* матриц перехода от v к u и от u к w, что записывается в виде равенства

$$C_{wv} = C_{wu} C_{uv} \tag{3-14}$$

(обратите внимание на то, что порядок сомножителей в этом произведении такой же, как в композиции отображений, т. е. *первый* переход от v к u стоит справа, а *второй* переход от u к w — слева).

Определение 3.2
Пусть матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\Bbbk)$ и $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk)$ таковы, что ширина n матрицы A совпадает с высотой матрицы B. Матрица $P \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\Bbbk)$, число строк которой то же, что у матрицы A, число столбцов то же, что у матрицы B, а элемент p_{ij}, стоящий в пересечении i-той строки и j-того столбца, вычисляется по правилу

$$p_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,,$$

обозначается через $P = AB$ и называется *произведением* матриц A и B.

Предостережение 3.1 Порядок, в котором стоят сомножители в произведении существенен. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}$$

3.4.1. Свойства матричного умножения. Правило вычисления произведения двух матриц можно формулировать несколькими эквивалентными способами, каждый из которых по-своему полезен при вычислениях.

Во-первых, произведение матриц полностью определяется правилом умножения строки на столбец (длина строки должна совпадать с высотой столбца):

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\,,$$

и результат умножения матрицы A из k строк на матрицу B из m столбцов той же высоты, что ширина строк в A, — это таблица всех попарных произведений строк A на столбцы B: в позиции (i,j) этой таблицы стоит произведение i-той строки A на j-тый столбец B

$$p_{ij} = (a_{i1},\, a_{i2},\, \dots\, ,\, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} .$$

Второе описание таково: в j-том столбце произведения AB стоит линейная комбинация n столбцов матрицы A (рассматриваемых как векторы координатного пространства $\Bbbk^k$), взятых с коэффициентами, стоящими в j-том столбце матрицы B. Если, к примеру, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \tag{3-15}$$

хочется написать вместо второго столбца сумму первого и третьего, а первый и третий столбцы заменить на их суммы со вторым, умноженным, соответственно, на λ и на μ, после чего добавить к полученной матрице ещё один, четвёртый столбец, равный сумме столбцов матрицы A, умноженных на их номера, то это достигается умножением A справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \mu & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Упражнение 3.8. Проверьте это прямым вычислением по первому способу.

Третье описание произведения двойственно второму и получается из него при помощи такого наблюдения:

Упражнение 3.9. Убедитесь, что операция транспонирования $C \mapsto C^t$ (ср. с предл. 3.1 на стр. 54) взаимодействует с умножением матриц по правилу

$$(AB)^t = B^t A^t \,.$$

Если описать вторым способом столбцы произведения $B^tA^t = (AB)^t$, а затем заменить в этом описании слово «столбец» на слово «строка», то получим, что в i-той строке матрицы AB стоит линейная комбинация n строк матрицы B (рассматриваемых как векторы координатного пространства $\Bbbk^m$), взятых с коэффициентами, стоящими в i-той строке матрицы A. Например, если в той же матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

хочется поставить вторую строку на место первой, а вместо второй написать её сумму с первой строкой, умноженной на λ, то это достигается умножением слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 3.10. Убедитесь, что умножение матриц ассоциативно, т. е.

$$(AB)C = A(BC) \quad \forall\, A \in \mathrm{Mat}_{m\times k}\,,\; B \in \mathrm{Mat}_{k\times \ell}\,,\; C \in \mathrm{Mat}_{\ell\times n}$$

и линейно по каждому из сомножителей, т. е.

$$(\lambda_1 A_1 + \mu_1 B_1)(\lambda_2 A_2 + \mu_2 B_2) = \\ = \lambda_1\lambda_2 A_1 A_2 + \lambda_1\mu_2 A_1 B_2 + \mu_1\lambda_2 B_1 A_2 + \mu_1\mu_2 B_1 B_2$$

для любых $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{k\times n}$, $B_1, B_2 \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Bbbk$.

Предложение 3.3
Для любых квадратных матриц A и B одинакового размера

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \tag{3-16}$$

В частности, $\det(AB) = \det(BA)$.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Если столбцы $v_1, v_2, \dots, v_n \in \Bbbk^n$ матрицы A линейно зависимы, то размерность их линейной оболочки меньше n. Поскольку столбцы матрицы AB лежат в линейной оболочке столбцов матрицы A, размерность их линейной оболочки тоже меньше n, и значит, они тоже линейно зависимы. Таким образом, в этом случае обе части равенства (3-16) нулевые.

Если векторы v_i линейно независимы, то они образуют в $\Bbbk^n$ базис. Зададим на пространстве $\Bbbk^n$ две формы объёма: ω_e, такую что объём стандартного базисного параллелепипеда $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, и ω_v, такую что $\omega_v(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$. По теор. 3.1 эти две формы пропорциональны друг другу с коэффициентом пропорциональности $\det A$:

$$\omega_v = \omega_e(v_1, v_2, \dots, v_n)\cdot\omega_e = \det(A)\cdot\omega_e\,. \tag{3-17}$$

Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Bbbk^n$ векторы, координаты которых в базисе $v_1, v_2, \dots, v_n$ являются столбцами матрицы B. Иными словами, пусть

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)\cdot B\,.$$

Тогда по теор. 3.1 $\omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(B)$, и в силу (3-17)

$$\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(A)\cdot\det(B)\,. \tag{3-18}$$

С другой стороны, т. к. $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)\cdot A$,

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)\cdot B = (e_1, e_2, \dots, e_n)\cdot AB$$

откуда по теор. 3.1 $\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(AB)$. Сравнивая это с (3-18), получаем требуемое равенство $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$. □

3.4.2. Обратимые матрицы. Если два набора векторов

$$u_1, u_2, \dots, u_n \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m$$

оба являются базисами n-мерного векторного пространства V, то матрицы перехода C_{uw} и C_{wu} удовлетворяют соотношениям $C_{uw} \cdot C_{wu} = C_{wu} \cdot C_{uw} = E$, где

$$E = C_{uu} = C_{ww} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(по диагонали стоят единицы, в остальных местах — нули). Матрица E называется *единичной матрицей*, поскольку для любой матрицы $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ выполняются равенства $ME = EM = M$.

Квадратная матрица $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$ называется *обратимой*, если существует матрица $M^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk)$, такая что $MM^{-1} = M^{-1}M = E$. Матрица M^{-1} называется в этом случае *обратной* к M. Она однозначно определяется по M: если M_1^{-1} и M_2^{-1} — две такие матрицы, то

$$M_1^{-1} = M_1^{-1} \cdot E = M_1^{-1} \cdot M \cdot M_2^{-1} = E \cdot M_2^{-1} = M_2^{-1}.$$

Предложение 3.4
Матрица M обратима, если и только если $\det M \neq 0$, и в этом случае

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot M^{\vee},$$

где *присоединённая матрица* $M^{\vee}$ имеет в i-той строке и j-том столбце число, равное взятому со знаком $(-1)^{i+j}$ определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, которая получается из матрицы M удалением j-той строки и i-того столбца[0].

Доказательство. Если матрица M обратима, то по предл. 3.3

$$\det M \cdot \det M^{-1} = \det\left(M \cdot M^{-1}\right) = \det E = 1.$$

Поэтому определители обратных матриц обратны друг другу и, стало быть, отличны от нуля. Наоборот, если $\det M \neq 0$, то столбцы матрицы M по предл. 3.2 образуют базис координатного пространства $\Bbbk^n$, и как мы видели выше, матрица перехода от стандартного базиса к базису из столбцов матрицы M обратна к M. Это доказывает первое утверждение.

Для вычисления обратной матрицы обозначим через $m_1, m_2, \dots, m_n \in \Bbbk^n$ столбцы матрицы M, а через $x_1, x_2, \dots, x_n$ — элементы j-того столбца матрицы M^{-1}, так что $x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n = e_j$ есть j-тый стандартный базисный

[0] обратите внимание, что i и j подверглись транспозиции

вектор координатного пространства $\Bbbk^n$. По правилу Крамера число x_i, стоящее в i-той строке и j-том столбце матрицы M^{-1} равно

$$\frac{\det(m_1, \dots, m_{i-1}, e_j, m_{i+1}, \dots, m_n)}{\det(M)}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i-том столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j-той строке. Делая $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк, переставляем её в верхний левый угол:

$$\begin{aligned}
&\det(m_1, \dots, m_{i-1}, e_j, m_{i+1}, \dots, m_n) = \\
&\qquad = (-1)^{i-1}\det(e_j, m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n) = \\
&\qquad = (-1)^{i+j-2}\det\begin{pmatrix}
1 & m_{j,1} & \cdots & m_{j,i-1} & m_{j,i+1} & \cdots & m_{j,n} \\
0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,i-1} & m_{1,i+1} & \cdots & m_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & m_{j-1,2} & \cdots & m_{j-1,i-1} & m_{j-1,i+1} & \cdots & m_{j-1,n} \\
0 & m_{j+1,2} & \cdots & m_{j+1,i-1} & m_{j+1,i+1} & \cdots & m_{j+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,i-1} & m_{n,i+1} & \cdots & m_{n,n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ненулевой вклад в определитель этой матрицы дают только те перестановки, которые оставляют 1 на месте и сумма соответствующих произведений матричных элементов равна определителю $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, получающейся выкидыванием из написанной выше матрицы первой строки и первого столбца, т. е. удалением j-той строки и i-того столбца в матрице M. □

Пример 3.3

Обратная матрица к 2×2-матрице определителя 1 находится по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(в общем случае все матричные элементы справа надо поделить на $ad-bc$). Обратная матрица к 3×3-матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

определителя $\det A = 1$ находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{31}) & (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\
-(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\
(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{32}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
\end{pmatrix}$$

а в общем случае все её элементы надо ещё поделить на $\det A$.

Упражнение 3.11. Проверьте прямым перемножением, что в обоих случаях произведение обратной матрицы на исходную равно E.

Пример 3.4 (барицентрические координаты как объёмы)
В условиях n° 2.6.3 рассмотрим в аффинном пространстве A_n набор из $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих ни в какой гиперплоскости, поместим пространство A_n в качестве аффинной гиперплоскости в $(n+1)$-мерное аффинное пространство A_{n+1} и зафиксируем в A_{n+1} координатный репер с началом в какой-нибудь точке $q \notin A_n$ и базисными векторами

$$e_0 = \overrightarrow{qp}_0 \,, \quad e_1 = \overrightarrow{qp}_1 \,, \quad e_2 = \overrightarrow{qp}_2 \,, \quad \dots \,, \quad e_n = \overrightarrow{qp}_n \,.$$

Тогда координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ произвольной точки $a \in A_n$ относительно этого репера можно искать по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega\,(\overrightarrow{qp}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{qp}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{qp}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{qp}_n)}{\omega\,(\overrightarrow{qp}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{qp}_n)} \,,$$

Подставляя в числитель $\overrightarrow{qp}_\nu = \overrightarrow{qa} + \overrightarrow{ap}_\nu$ для каждого $\nu \neq i$ и пользуясь полилинейностью объёма и тем, что он зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем числитель к виду

$$\omega\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n) \,.$$

Аналогично, подставляя в знаменатель $\overrightarrow{qp}_\nu = \overrightarrow{qp}_i + \overrightarrow{p_ip}_\nu$ для каждого $\nu \neq i$, преобразуем его к виду

$$\omega\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{qp_i}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n) \,.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{qp_i}$ и $\overrightarrow{qa}$ отличаются друг от друга на линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{p_ip}_\nu$ с $\nu \neq i$, знаменатель равен

$$\omega\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n) \,.$$

Таким образом,

$$x_i = \frac{\omega\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n)}{\omega\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n)} \,,$$

Геометрически это отношение равно отношению объёмов двух $(n+1)$-мерных пирамид с общей вершиной q и основаниями

$$[p_0, p_1, \dots, p_n] \quad \text{и} \quad [p_0, \,\dots\,, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \,\dots\,, p_n] \,,$$

лежащими в одной и той же гиперплоскости A_n, не проходящей через q. Хочется ожидать, что такое отношение равно отношению n-мерных объёмов *оснований* этих пирамид. В евклидовом пространстве это сразу следует из того, что объём пирамиды пропорционален произведению объёма основания на длину высоты, которая у данных двух пирамид одинакова (мы покажем это в прим. 4.8 ниже). Доказательство, работающее над *любым* полем, выглядит следующим образом.

Выберем в $(n+1)$-мерном пространстве, ассоциированном с A_{n+1}, базис, образованный вектором $u_0 = \overrightarrow{qa}$, и любыми векторами $u_1, u_2, \dots, u_n$, составляющими базис n-мерного векторного пространства V, ассоциированного с A_n. Зададим форму $(n+1)$-мерного объёма так, чтобы объём этого базиса был равен единице. Тогда точно такое же вычисление, как и в доказательстве предл. 3.4 показывает, что

$$\begin{aligned}
&\omega\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n) = \\
&\qquad = \det\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, u_0, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n) = \\
&\qquad\qquad = (-1)^i \det\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n)
\end{aligned} \tag{3-19}$$

где в середине стоит матрица размера $(n+1)\times(n+1)$, по столбцам которой выписаны координаты векторов $\overrightarrow{ap}_i$ и вектора u_0 (он стоит в $(i+1)$-м столбце) в базисе u — она имеет вид[0]

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
* & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
* & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}$$

так что её определитель с точностью до знака совпадает с определителем подматрицы размера $n \times n$, получающейся выкидыванием первой строки и i-того столбца и содержащей координаты n векторов $\overrightarrow{ap}_i \in V$ в базисе $u_1, u_2, \dots, u_n$ n-мерного векторного пространства V — именно этот определитель и написан в правой части формулы (3-19). По тем же причинам,

$$\begin{aligned}
&\omega\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n) = \\
&\qquad = \det\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, u_0, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n) = \\
&\qquad\qquad = (-1)^i \det\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, барицентрические координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$ точки $a \in A_n$ относительно симплекса $p_0, p_1, \dots, p_n$ можно вычислять как отношения объёмов:

$$x_i = \frac{\det\,(\overrightarrow{ap}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{ap}_n)}{\det\,(\overrightarrow{p_ip}_0, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_{i-1}, \overrightarrow{p_ip}_{i+1}, \,\dots\,, \overrightarrow{p_ip}_n)}\,, \tag{3-20}$$

[0]в отмеченных звёздочками позициях стоят координаты векторов $\overrightarrow{ap}_i \in V$ в базисе $u_1, u_2, \dots, u_n$ n-мерного векторного пространства V

Здесь стоят определители матриц, по столбцам которых записаны координаты указанных векторов в произвольном базисе n-мерного векторного пространства V, ассоциированного с A_n, или — что то же самое — объёмы n-мерных параллелепипедов, натянутых на указанные векторы (отношение таких объёмов не зависит от выбора формы объёма на V). Это и есть формула, анонсированная в конце n° 2.6.3.