Точные пары и спектральные последовательности

A7◇1 (точные пары). Точная диаграмма
$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$
называется *точной парой* и обозначается (D, E, i, j, k) Покажите, что $d : E \xrightarrow{jk} E$ удовлетворяет $d^2 = 0$ и диаграмма
$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$
, в которой $D' = \operatorname{im} i \subset D$, $E' = \ker d / \operatorname{im} d$, $i' = i|_{\operatorname{im} i}$, $j' : i(x) \longmapsto j(x)$, $k' : x \pmod{\operatorname{im} d} \longmapsto k(x)$, также является точной парой[1].

A7◇2. Покажите, что $(r-1)$-тая производная $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ точной пары $(D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ имеет $D_r = \operatorname{im} i_1^{r-1}$, $E_r = k_1^{-1}(\operatorname{im} i_1^{r-1}) / j_1(\ker i_1^r)$ и порождает точную тройку
$$0 \longrightarrow \operatorname{im} i_1^{r-1} / \operatorname{im} i_1^r \longrightarrow E_r \longrightarrow \ker i_1^r / \ker i_1^{r-1} \longrightarrow 0$$

Спектральная последовательность биградуированной точной пары. Точная пара (D, E, i, j, k) называется *верхнебиградуированной*, если $D = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} D^{p,q}$, $E = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} E^{p,q}$ и $\deg i = (-1, 1)$, $\deg j = (0, 0)$, $\deg k = (1, 0)$, т. е. $i = \oplus i^{(p,q)}$, $j = \oplus j^{(p,q)}$, $k = \oplus k^{(p,q)}$ с
$$D^{p,q} \xrightarrow{i^{(p,q)}} D^{p-1,q+1} , \quad D^{p,q} \xrightarrow{j^{(p,q)}} E^{p,q} , \quad E^{p,q} \xrightarrow{k^{(p,q)}} D^{p+1,q} .$$
Двойственным образом, в *нижнебиградуированной*[2] точной паре (D, E, i, j, k) должно быть $D = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} D_{p,q}$, $E = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} E_{p,q}$ и $\deg i = (1, -1)$, $\deg j = (0, 0)$, $\deg k = (-1, 0)$. Рассмотрим последовательные производные $(D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ от верхнебиградуированной точной пары $(D, E, i, j, k) = (D_1, E_1, i_1, j_1, k_1)$ и для каждого $r = 1, 2, \dots$ расположим однородные компоненты $E_r^{p,q}$ модуля E_r в клетки прямоугольной таблицы (эти клетки мы будем нумеровать индексами $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с горизонтальной координатой p). Последовательность таблиц E_1, E_2, E_3, … и есть *спектральная последовательность* точной пары (D, E, i, j, k).

A7◇3. Покажите, что на элементах r-той таблицы E_r корректно определён биградуированный дифференциал $d_r^{(p,q)} : E_r^{p,q} \xrightarrow{(j_r \circ k_r)^{(p,q)}} E_r^{p+r,q+1-r}$ (см. диаграмму), и содержимое $(r+1)$-ой таблицы — это в точности его когомологии $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{(p,q)} / \operatorname{im} d_r^{p-r,q-1+r}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "k"'] & D^{p-1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+2} \arrow[r, "j"] & E^{p+1,q+2} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+2} \arrow[r, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "k"'] & D^{p-1,q+1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q+1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q+1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "k"'] & D^{p-1,q} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "k"'] & D^{p-1,q-1} \arrow[r, "j"] & E^{p-1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+1,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & E^{p+1,q-1} \arrow[r, "k"'] & D^{p+2,q-1} \arrow[r, "j"] \arrow[ull, "i"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A7◇4. Пусть $E_1^{p,q}$ зануляются равномерно по p при всех $q \ll 0$ и равномерно по q при всех $p \ll 0$. Покажите, что в этом случае $\forall\, n > 0\ \exists\, N$ такой, что $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ для всех $r > N$ и

[1] она называется *производной* от исходной и обозначается (D', E', i', j', k')

[2] нижние и верхние обозначения отличаются друг от друга переменой знака у индексов

всех p,q с $p+q=n$ (стабилизировавшееся содержимое таких клеток называются *предельным* и обозначается $E_\infty^{p,q}$). Опишите $E_\infty^{p,q}$ и $\bigoplus\limits_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$ в терминах морфизма $D \xrightarrow{i} D$ из исходной точной пары[3].

Предел. Спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ называется *сходящейся* к градуированному модулю[4] $\bigoplus\limits_n E_\infty^n$, если выполняются следующие два условия:

1) $E_r^{p,q}$ стабилизируются, т. е. $\forall\, p,q\ \exists\ N=N(p,q)$ такой, что во всех таблицах E_r с $r>N$ входящий в (p,q)-ю клетку и исходящий из (p,q)-ой клетки дифференциалы оба зануляются; стабилизировавшееся содержимое (p,q)-ой клетки $E_{N+1}^{p,q}=E_{N+2}^{p,q}=\dots$ обозначается $E_\infty^{p,q}$
2) каждая компонента E_∞^n имеет убывающую фильтрацию $\cdots\ \supset F^pE_\infty^n \supset F^{p+1}E_\infty^n \supset\ \cdots$ с $E_\infty^n=\bigcup\limits_p F^pE_\infty^n$, присоединённые факторы которой совпадают со стабильными клетками $E_\infty^{p,q}$, стоящими на диагонали $p+q=n$, т. е. $F^pE_\infty^n/F^{p+1}E_\infty^n=E_\infty^{p,n-p}$.

А7◇5 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса). Пусть на каждом члене комплекса $\cdots \xrightarrow{d} K^m \xrightarrow{d} K^{m+1} \xrightarrow{d} \cdots$ имеется убывающая фильтрация $K^m = F^0K^m \supset F^1K^m \supset F^2K^m \supset \cdots$, согласованная с дифференциалом в том смысле, что $d(F^pK^m) \subset F^pK^{m+1}\ \forall\ p,\ m$. Тогда при каждом p подмодули $F^pK^\bullet$ образуют комплекс с тем же дифференциалом d, а фактор модули $G^pK^\bullet = F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet$ образуют комплекс с дифференциалом, индуцированным d.

а) Для каждого p постройте длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots\ H^i(F^{p+1}K^\bullet) \longrightarrow H^i(F^pK^\bullet) \longrightarrow H^i(G^pK^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(F^{p+1}K^\bullet) \longrightarrow\ \cdots$$

и биградуированную точную пару с $D_1^{p,q}=H^{p+q}(F^pK^\bullet)$, $E_1^{p,q}=H^{p+q}(G^pK^\bullet)$, а также опишите все производные клетки $E_r^{p,q}$ этой точной пары.

б) Покажите, что когда комплекс K ограничен, а фильтрация конечна, то $E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(K^\bullet)$ и имеет $E_1^{p,q}=H^{p+q}(G^pK^\bullet)$.

А7◇6 (спектральная последовательность двойного комплекса). Напомню, что *двойной комплекс* — это биградуированный модуль $K^{\bullet\bullet}=\oplus K^{p,q}$ с двумя семействами суперкоммутирующих дифференциалов[5] $K^{p,q} \xrightarrow{d_1} K^{p+1,q}$, $K^{p,q} \xrightarrow{d_2} K^{p,q+1}$. Покажите, что

а) диагональные суммы $\mathrm{Tot}^n(K) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus\limits_{p+q=n} K^{p,q}$ образуют комплекс[6] с дифференциалом

$$\mathrm{Tot}^n(K) \xrightarrow{d_1+d_2} \mathrm{Tot}^{n+1}(K)\ ,$$

на котором есть убывающая фильтрация ${}^IF^p\mathrm{Tot}^m(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu\geqslant p\\ p+q=n}} K^{p,q}$, ассоциированный фактор комплекс которой имеет в качестве p-той компоненты ${}^IG^p\mathrm{Tot}^\bullet(K) = \bigoplus\limits_{\substack{\nu\geqslant p\\ p+q=n}} K^{p,q}$ в точности p-тый столбец бикомплекса $K^{\bullet\bullet}$ рассматриваемый с дифференциалом d_2, а на его когомологиях $H_{d_2}^q(K^{p,\bullet})$ корректно определена структура комплекса с дифференциалом $H_{d_2}^q(K^{p,\bullet}) \xrightarrow{d_1} H_{d_2}^q(K^{p+1,\bullet})$, причём когомологии этого последнего комплекса $H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ организуются в спектральную последовательность, начинающуюся с таблицы ${}^IE_2^{p,q}=H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ и сходящуюся к $H^n(\mathrm{Tot}^\bullet(K))$.

б) Постройте вторую спектральную последовательность ${}^{II}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\mathrm{Tot}^\bullet(K))$ с ${}^{II}E_2^{p,q}=H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$, возникающую аналогичным образом из второй фильтрации на $\mathrm{Tot}^\bullet(K)$:

$${}^{II}F^q\mathrm{Tot}^m(K) = \bigoplus_{\substack{\nu\geqslant q\\ p+q=n}} K^{p,q}\ .$$

[3] для этого стоит переговорить равномерное зануление левой и нижней сторон таблицы $E_1^{p,q}$ в терминах $D^{p,q}$ с $(p+q)=n$ и $p\ll 0$, $p\gg 0$

[4] это часто записывают как $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$

[5] т. е. таких что $d_1^2=d_2^2=d_1d_2+d_2d_1=0$

[6] он называется *тотальным комплексом* или *свёрткой* исходного бикомплекса $K^{\bullet\bullet}$