Диаграммы и комплексы

все задачи этого листка про модули над произвольным коммутативным кольцом $\Bbbk$

А6◇1. Дана коммутативная диаграмма с точными[1] строками

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & V'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W' \arrow[r] & W \arrow[r] & W'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad . \tag{1}
$$

Верно ли, что **а)** φ изо $\iff \varphi'$ моно & φ'' эпи **б)** φ', φ'' оба изо $\Rightarrow \varphi$ изо

А6◇2 (лемма о пяти гомоморфизмах). Дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$
\begin{tikzcd}
V_1' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1'"'] & V_2' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2'"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & V_2'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2''"] & V_1'' \arrow[d, "\varphi_1''"] \\
W_1' \arrow[r] & W_2' \arrow[r] & W \arrow[r] & W_2'' \arrow[r] & W_1''
\end{tikzcd}
$$

Гарантирует ли **а)** инъективность **б)** сюрьективность **в)** биективность четырёх боковых стрелок φ_1', φ_1'', φ_2', φ_2'' наличие этого свойства и у центральной стрелки φ?

А6◇3. Пусть в диаграмме (1) с точными строками нет морфизма **а)** φ' **б)** φ''. Восстановите их из коммутативности диаграммы и найдите необходимые и достаточные условия для инъективности φ' (при заданном φ'') и сюрьективности φ'' (при заданном φ').

А6◇4 (лемма о змее). Для коммутативной диаграммы (1) с точными строками постройте точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\varphi' \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \ker\varphi'' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi' \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi \longrightarrow \operatorname{coker}\varphi'' \longrightarrow 0\,.$$

Комплексы и когомологии. Если в последовательности $\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$ $d^{i+1}\circ d^i = 0$ при всех i, то $(K^\bullet, d)$ называется *комплексом*, отображения d — *дифференциалами*, а факторы $H^i = \ker d^i/\operatorname{im} d^{i-1}$ — *когомологиями*. Морфизм комплексов $(K^\bullet, d_K) \xrightarrow{\psi^\bullet} (L^\bullet, d_L)$ это набор отображений $K^i \xrightarrow{\psi^i} L^i$, перестановочных с дифференциалами: $d_L\psi = \psi d_K$. Ядро и образ морфизма комплексов определяются покомпонентно.

А6◇5°. Покажите, что: **а)** ядро и образ морфизма комплексов являются комплексами

б) всякий морфизм комплексов $(K^\bullet, d_K) \xrightarrow{\psi^\bullet} (L^\bullet, d_L)$ корректно задаёт морфизм когомологий $H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^i} H^i(L^\bullet)$

в) каждая точная тройка комплексов $0 \longrightarrow K'_\bullet \xrightarrow{\alpha'} K_\bullet \xrightarrow{\alpha''} K''_\bullet \longrightarrow 0$ порождает *длинную точную последовательность когомологий*

$$\cdots \longrightarrow H^i(K'_\bullet) \xrightarrow{\alpha'_*} H^i(K_\bullet) \xrightarrow{\alpha''_*} H^i(K''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K'_\bullet) \xrightarrow{\alpha'_*} H^{i+1}(K_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

А6◇6°. Пусть ограниченный комплекс векторных пространств $V^\bullet$ имеет когомологии $H^\bullet$. Покажите, что[2] $\sum(-1)^i \dim V^i = \sum(-1)^i \dim H^i$.

А6◇7 (гомотопии). Морфизм комплексов $V^\bullet \xrightarrow{\varphi^\bullet} W^\bullet$ называется *стягиваемым* (или *гомотопным нулю*), если имеется последовательность отображений[3] $V^i \xrightarrow{\gamma^i} W^{i-1}$:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_V^{i-2}"] & V^{i-1} \arrow[r, "d_V^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & V^i \arrow[r, "d_V^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] \arrow[dl, "\gamma^i"'] & V^{i+1} \arrow[r, "d_V^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] \arrow[dl, "\gamma^{i+1}"'] & V^{i+2} \arrow[r, "d_V^{i+2}"] \arrow[d, "\varphi^{i+2}"] \arrow[dl, "\gamma^{i+2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_W^{i-2}"'] & W^{i-1} \arrow[r, "d_W^{i-1}"'] & W^i \arrow[r, "d_W^i"'] & W^{i+1} \arrow[r, "d_W^{i+1}"'] & W^{i+2} \arrow[r, "d_W^{i+2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

[1] последовательность отображений $\cdots \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \cdots$ *точной в X*, если $\ker\beta = \operatorname{im}\alpha$

[2] это число обозначается $\chi(V)$ и называется *эйлеровой характеристикой* комплекса (V, d)

[3] она называется *стягивающей гомотопией*

такая что $\varphi = d_W\circ\gamma + \gamma\circ d_V$. Покажите, что если разность двух морфизмов $\varphi, \psi : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ стягиваема[4], то их действие на когомологиях одинаково: $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$.

А6◇8 (дифференциалы Кошуля и Де Рама). Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис пространства V, а x_i и ξ_i обозначают классы e_i в алгебрах $S(V)$ и $\Lambda(V)$. Отображения[5]

$$\Lambda^{k+1}V \otimes S^{m-1}V \xleftarrow{d \overset{\mathrm{def}}{=} \sum \xi_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu}} \Lambda^k V \otimes S^m V \xrightarrow{\partial \overset{\mathrm{def}}{=} \sum \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu} \Lambda^{k-1}V \otimes S^{m+1}V$$

называются *дифференциалами Де Рама* и *Кошуля*. Покажите, что они не зависят от выбора базиса и что d является гомоморфизмом $\Lambda^\bullet V$-алгебр, а ∂ — гомоморфизмом $S^\bullet V$-алгебр. Проверьте, что $d^2 = \partial^2 = 0$, вычислите $d\partial + \partial d$ и когомологии d и ∂ .

А6◇9 (бикомплексы). Покажите, что для любых двух комплексов $\Bbbk$-модулей $(V^\bullet,\, d_V)$, $(W^\bullet,\, d_W)$

а) модули $M_p^q = \mathrm{Hom}_\Bbbk(V^p, W^q)$ образуют бикомплекс[6] с дифференциалами, переводящими стрелку $V^p \xrightarrow{\varphi} W^q \in M_p^q$ в $\partial(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^{q-p}\varphi\circ d_V \in M_{p-1}^q$ и $d(\varphi) \overset{\mathrm{def}}{=} d_W\circ\varphi \in M_p^{q+1}$;

б) нулевые когомологии $H^0\,(\mathrm{GrHom}^\bullet(V, W))$ суть классы гомотопической эквивалентности морфизмов комплексов $V^\bullet \xrightarrow{\varphi} W^\bullet$.

в) модули $T^{p,q} = V^p \underset{\Bbbk}{\otimes} W^q$ образуют бикомплекс[7] с дифференциалами $d_I = d_V \otimes 1$ и $d_{II} = 1 \otimes d_W$, которые действуют на $v \otimes w \in T^{p,q}$ по правилам $d_I(v\otimes w) = (d_V v)\otimes w \in T^{p+1,q}$ и $d_{II}(v \otimes w) = (-1)^p v \otimes (d_W w) \in T^{p,q+1}$.

А6◇10. Зафиксируем $f \in \Bbbk$ и обозначим через $L_f^\bullet$ двучленный комплекс $\Bbbk \xrightarrow{x\mapsto xf} \Bbbk$ сосредоточенный в степенях[8] -1, 0. Для любого комплекса $\Bbbk$-модулей $(V^\bullet,\, d_V)$ постройте длинную последовательность когомологий:

$$\cdots\ H^i(V^\bullet) \xrightarrow{x\mapsto xf} H^i(V^\bullet) \longrightarrow H^i(V^\bullet \underset{k}{\otimes} L^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(V^\bullet) \xrightarrow{x\mapsto xf} H^{i+1}(V^\bullet)\ \cdots$$

Указание. рассмотрите точную тройку комплексов $0 \longrightarrow V^\bullet \longrightarrow V^\bullet \underset{k}{\otimes} L^\bullet \longrightarrow V[1]^\bullet \longrightarrow 0$, в которой $V[1]^\bullet$ имеет в качестве i-той компоненты $V[1]^i \overset{\mathrm{def}}{=} V^{i+1}$ и $d_{V[1]} = -d_V$.

А6◇11 (комплекс Кошуля 2). Зафиксируем набор элементов $f_1, f_2, \dots, f_r \in \Bbbk$ и обозначим через $\Bbbk^r$ свободный модуль ранга r с базисом $e_1, e_2, \dots, e_r$. Покажите, что тензорное произведение $\bigotimes_{\nu=1}^{r} L_{f_\nu}^\bullet$ двучленных комплексов из зад. А6◇10 можно описать как комплекс

$$0 \longrightarrow \Lambda^r\,(\Bbbk^r) \xrightarrow{\partial_r} \cdots \xrightarrow{\partial_3} \Lambda^2\,(\Bbbk^r) \xrightarrow{\partial_2} \Lambda^1\,(\Bbbk^r) \xrightarrow{\partial_1} \Lambda^0\,(\Bbbk^r) \longrightarrow 0$$

с дифференциалом $\partial = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} f_\alpha \dfrac{\partial}{\partial e_\alpha}$, который действует на базисные векторы по правилу

$$\partial_\nu(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_\nu}) = \sum_{m=1}^{\nu} (-1)^{m-1} f_{i_m} \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{m-1}} \wedge e_{i_{m+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_\nu}\ ,$$

и проверьте, что для *регулярной* последовательности[9] $f_1, f_2, \dots, f_r$ его ненулевые когомологии исчерпываются $H^0 = \Bbbk/(f_1, f_2, \dots, f_r)$.

---

[4] такие морфизмы называются *гомотопными* или *гомотопически эквивалентными*

[5] напомню, что частная производная $\partial/\partial\xi_i : S^k V \longrightarrow S^{k-1}V$ (соотв. $\partial/\partial x_i : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1}V$) определяется как умноженная на $\Bbbk$ композиция симметричного (соотв. кососимметричного) подъёма в тензорную алгебру, затем свёртки по первому сомножителю с элементом e_i^* двойственного базиса V^*, затем спуска назад в симметрическую (соотв. грассманову) алгебру; в частности, грассмановы частные производные удовлетворяют соотношениям $\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_\mu} = -\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}$ и $\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg\omega_1}\omega_1 \wedge (\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\omega_2)$

[6] его тотальный комплекс $\mathrm{GrHom}^n(V^\bullet,\, W^\bullet) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus\limits_{q-p=n} M_p^q$ называется Hom-*комплексом* исходных комплексов

[7] тотальный комплекс этого бикомплекса называется *тензорным произведением* исходных комплексов

[8] отметим, что его когомологии суть $H^{-1}(L_f^\bullet) = \mathrm{Ann}\,(f) = \{a \in \Bbbk \mid af = 0\}$ и $H^0(L_f^\bullet) = \Bbbk/(f)$

[9] напомню, что это означает, что класс вычета $f_i \pmod{(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})}$ не делит нуль в фактор кольце $\Bbbk/(f_0, f_1, \dots, f_{i-1})$ ни при каком $i \geqslant 2$, а f_1 не делит нуль в самом $\Bbbk$