Алгебраические многообразия.

А3◇1. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих данное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, плотно и открыто (по Зарисскому) в грассманиане[1] $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

А3◇2. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует алгебраическую гиперповерхность в пространстве квартик $\mathbb{P}(S^4V^*)$.

А3◇3. Покажите, что в пучке плоскостей, проходящих через заданную прямую ℓ, лежащую на гладкой кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$ имеется ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, пересекающих S по тройке прямых.

А3◇4. Может ли плоское сечение гладкой кубики $S \subset \mathbb{P}_3$ распасться в объединение гладкой коники и ее касательной?

А3◇5. Любую ли гладкую кубику $S \subset \mathbb{P}_3$ можно задать в подходящих координатах уравнением $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \psi_1\psi_2\psi_3 = 0$, где φ_i и ψ_j суть линейные однородные формы[2].

А3◇6. Пусть точки $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ таковы, что никакие три из них не коллинеарны и ни одна не лежит на квадрике, проходящей через 5 других. Обозначим через $W = \{F \in S^3V^* \mid F(p_i) = 0 \ \forall\, i = 1, 2, \dots, 6\}$ пространство кубических форм на V, зануляющихся в этих точках, и рассмотрим отображение $\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}(W^*)$, отправляющее точку $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ в гиперплоскость из W, образованную формами, зануляющимися в p. Верно ли, что **а)** $\dim W = 4$ **б)** $S = \overline{\psi\left(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\}\right)}$ есть кубика в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$.

в) ψ продолжается до регулярного изоморфизма между S и раздутием $\mathbb{P}_2$ в $p_1, p_2, \dots, p_6$.

г) Что за 27 пучков плоских кубических кривых, проходящих через $p_1, p_2, \dots, p_6$, соответствуют при этом 27 прямым на S?

А3◇7 (двойная шестёрка Шлефли). Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ шесть прямых $[0], [1], \dots, [5]$, таких что прямые $[1], \dots, [5]$ попарно скрещиваются между собой и ни одна из них не касается и не лежит на квадрике, проведенной через любые 3 другие, а прямая $[0]$ пересекается со всеми пятью прямыми $[1], \dots, [5]$. Верно ли, что:

а) $\forall\, i = 1, \dots, 5$ существует единственная прямая $[i'] \neq [0]$ такая, что $[i'] \cap [j] \neq \varnothing \ \forall\, j \neq i$;

б) $[i'] \cap [i] = [i'] \cap [j'] = \varnothing$ для всех $i = 1, \dots, 5$ и для всех $j \neq i$;

в) ни одна из прямых $[1'], \dots, [5']$ не касается и не лежит на квадрике, проходящей через какие-нибудь 3 другие из этих прямых;

г) существует единственная прямая $[0']$, пересекающая каждую из[3] $[1'], \dots, [5']$

А3◇8. Покажите, что двойная шестёрка прямых из предыдущей задачи лежит на некоторой гладкой кубической поверхности и объясните, как получить ещё 15 прямых, лежащих на этой же кубике.

А3◇9*. Покажите, что изолированные точки слоев $\varphi^{-1}(y)$ регулярного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ заметают открытое подмножество в X, когда y пробегает Y.

А3◇10* (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий *конструктивен* в том смысле, что может быть построен из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств при помощи конечного числа объединений, пересечений и операций взятия дополнения.

---

[1] ПОДСКАЗКА: рассмотрите многообразие инцидентности $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$; с помощью проекции $\Gamma \longrightarrow X$ покажите, что оно неприводимое проективное, и вычислите его размерность; затем рассмотрите проекцию $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$

[2] ПОДСКАЗКА: используйте прямую $\ell \subset S$ и 5 плоскостей, содержащих ℓ и пересекающих S в тройке различных прямых

[3] ПОДСКАЗКА: пусть $[0_1'] \neq [1]$ и $[0_2'] \neq [2]$ пересекают каждую из $[1'], \dots, [5']$, кроме $[1']$ и $[2']$ соответственно; покажите, что они пересекают $[3'], [4'], [5']$ в одних и тех же точках p_3, p_4, p_5, однозначно определяемых из прямых $[3], [4], [5], [3'], [4'], [5']$, и $[0]$