Расширения колец.

A1◇1°. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_r$ порождают модуль M над коммутативным кольцом A, и эндоморфизм $M \xrightarrow{\varphi} M$ переводит m_i в $\sum\limits_j m_j \cdot \varphi_{ji}$, где (φ_{ji}) образуют $r \times r$-матрицу с элементами из A. Верно ли, что

а) $\varphi(M) \supset \det(\varphi_{ji}) \cdot M$?

б) $\mathfrak{a} \cdot M \neq M$ ни для какого собственного идеала $\mathfrak{a} \subset A$ при условии, что M точен[1].

A1◇2. Пусть $d \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты. Опишите целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2-d)}$.

A1◇3. Покажите, что любое факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

A1◇4. Цело ли кольцо A над своим подкольцом $B \subset A$, если

а) $A = \Bbbk[x,y]$ (где $\Bbbk$ — поле), $B = \left\{ f \in A \ : \ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(0,0)} f = 0 \right\}$;

б) $A = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2)$ (кольцо непрерывных функций), $B = \{ f \in A \mid f(1,0) = f(0,1) \}$;

в) A — любое кольцо с действием конечной группы[2] $\mathfrak{G}$, $B = A^{\mathfrak{G}}$ — подкольцо инвариантов.

A1◇5. Какие из перечисленных ниже колец нётеровы: **а)** $A[[t]]$, где A нётерово;

б) $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, сходящиеся всюду в $\mathbb{C}$; **в)** $\{ p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$;

г) $\{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f = 0$ при $0 \leqslant i+j \leqslant n \}$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксировано).

д*) произвольная подалгебра $A \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ конечной коразмерности[3].

A1◇6. Пусть A — нормальное кольцо[4] с полем частных $\mathbb{F}$. Верно ли, что

а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$?

б) если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$ (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости)?

A1◇7. Покажите, что любое поле, конечно порожденное как $\mathbb{Z}$-алгебра[5], является конечным множеством.

A1◇8. Пусть $B \supset A$ — целое расширение колец. Любой ли гомоморфизм $A \longrightarrow \Bbbk$ в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ продолжается до гомоморфизма $B \longrightarrow \Bbbk$?

A1◇9. Для двух идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ кольца A обозначим через $\mathfrak{ab}$ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Верно ли что **а°)** произведения ab уже и сами по себе образуют идеал;

б) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ **в)** $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, когда $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

A1◇10. Покажите, что *радикал* $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{ a \in A \mid a^n \in I \text{ for some } n \in \mathbb{N} \}$ любого идеала $I \subset A$ также является идеалом, и докажите верные и опровергните неверные из следующих утверждений про идеалы $I, J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$:

а) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **б)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **в)** $I = \sqrt{I}$ & $J = \sqrt{J}$ $\Rightarrow$ $IJ = \sqrt{IJ}$

---

[1] т. е. $aM = 0 \Rightarrow a = 0$ для $a \in A$

[2] кольцевыми автоморфизмами

[3] как векторное пространство над полем $\Bbbk$

[4] кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

[5] с тавтологическим действием $m \cdot a \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ раз}}$