Алгебраические расширения полей.

A12◇1. Найдите минимальные многочлены **а)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$ **б)** $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

A12◇2. Верно ли, что **а)** $\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ **б)** $\sin 36^\circ \in \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$?

A12◇3. Найдите размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки вещественных чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$ и $\sqrt{30}$.

A12◇4. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$ с полем **а)** $\mathbb{Q}(-1+\sqrt{-2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}+\sqrt{2})$?

A12◇5. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена **а)** x^4-2 **б)** x^p-a ($p\in\mathbb{N}$ простое, $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью).

A12◇6. Покажите, что для любого отличного от константы многочлена $f\in\mathbb{Z}[x]$ существует бесконечно много таких простых $p\in\mathbb{N}$, что f имеет корень в $\mathbb{F}_p$.

A12◇7. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n}-x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

A12◇8*. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}}_p$.

A12◇9. Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое, и $a\in\mathbb{F}_p^*$. Покажите, что многочлен x^p-x-a неприводим **а)** в $\mathbb{F}_p[x]$ — всегда **б)** в $\mathbb{F}_{p^n}[x]$ — если и только если $p\nmid n$.

A12◇10. При каких n многочлен $x^{2n}+x^n+1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

A12◇11. Неприводимы ли над $\mathbb{Q}$ при $n\not\equiv 2 \pmod 3$ многочлены **а)** x^n-x+1 **б)** x^n+x+1 ?

A12◇12. Убедитесь, что правила $\tau:\ x\mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}}x$, $\sigma:\ x\mapsto x^{-1}$ корректно задают действие группы диэдра D_n на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ и опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}$.

A12◇13. Верно ли, что $\operatorname{Aut}_{\Bbbk}\Bbbk(t)\simeq \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$?

A12◇14. Найдите поле инвариантов $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_n)^G$ для группы **а)** $G=S_n$ **б)** $G\subset S_n$, порождённой циклом длины n, **в)** G, порождённой гомотетией $x_\nu\mapsto e^{2\pi i/n}x_\nu$.

A12◇15. Пусть $G=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а $P\subset G$ и $N\subset P$ состоят из замен $t\mapsto at+b$ с $a\neq 0$ и $t\mapsto t+b$. Покажите, что **а)** $\mathbb{F}_q(t)^N=\mathbb{F}_q(t^q-t)$ **б)** $\mathbb{F}_q(t)^P=\mathbb{F}_q\big((t^q-t)^{q-1}\big)$ **в)** $\mathbb{F}_q(t)^G=\mathbb{F}_q\left((t^{q^2}-t)^{q+1}/(t^q-t)^{q^2+1}\right)$.

A12◇16. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk=p$, а x и y алгебраически независимы над $\Bbbk$.

а) Найдите степень $[\Bbbk(x,y):\Bbbk(x^p,y^p)]$.

б) Конечно ли множество таких полей $\mathbb{F}$, что $\Bbbk(x^p,y^p)\subset\mathbb{F}\subset\Bbbk(x,y)$?

Норма и след. Характеристический многочлен, след и определитель оператора умножения на элемент $\vartheta\in\mathbb{K}$ в конечном расширении $\mathbb{K}\supset\Bbbk$, обозначаются через $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta;x)\in\Bbbk[x]$ и $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)$, $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)\in\Bbbk$.

A12◇17. Покажите, что для конечного нормального сепарабельного расширения $\Bbbk\subset\mathbb{K}$ с группой Галуа $G=\operatorname{Aut}_{\Bbbk}\mathbb{K}$ выполняются равенства

а) $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta;x)=\prod\limits_{g\in G}(x-g\vartheta)$ **б)** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=\sum\limits_{g\in G}g\vartheta$ **в)** $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=\prod\limits_{g\in G}g\vartheta$.

A12◇18. Покажите, что для сепарабельного расширения $\mathbb{K}\supset\Bbbk$ билинейная форма следа $\mathrm{Sp}:\ \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\Bbbk$, $(\vartheta_1,\vartheta_2)\mapsto \mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta_1\vartheta_2)$, невырождена.

A12◇19. Покажите, что расширение $\mathbb{K}\supset\Bbbk$ чисто несепарабельно (т. е. каждый $\vartheta\in\mathbb{K}\smallsetminus\Bbbk$ несепарабелен над $\Bbbk$) если и только если $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=0$ для всех $\vartheta\in\mathbb{K}$.