Проективные алгебраические многообразия.

A11◇1. Пусть аффинное алгебраическое многообразие $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, где X_i неприводимы и $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$. Покажите, что кольцо рациональных функций[1] $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_m)$.

A11◇2. Покажите, что изолированные точки слоёв любого регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ заметают открытое (возможно, пустое) подмножество в X.

A11◇3. Покажите, что размерность неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ равна:

а) наибольшему такому $d \in \mathbb{Z}$, что $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $(n-d)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$

б) наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, при котором имеется $(n-d-1)$-мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$ с $X \cap L = \varnothing$

в) наименьшему такому $d \in \mathbb{Z}$, что $X \cap L = \varnothing$ для общего[2] $(n-d-1)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$.

A11◇4. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством грассманиана[3] $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

A11◇5. Обозначим через $\mathcal{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\big)$ проективное многообразие $m \times n$-матриц ранга $\leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$, где L — подпространство, а M — матрица, покажите, что $\mathcal{D}_k(m,n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите $\dim \mathcal{D}_k(m,n)$.

A11◇6. Покажите, что в $\mathbb{P}_3$

а) на каждой кубической поверхности лежит прямая

б) кубические поверхности с конечным числом лежащих на них прямых содержат плотное открытое подмножество пространства всех кубических поверхностей

в) множество поверхностей 4-й степени, на которых есть хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве всех поверхностей 4-й степени.

A11◇7. Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий.

A11◇8 (многообразие секущих). Пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$ неприводимо $\mathcal{S}(X) \subset \mathrm{Gr}(2, V)$ обозначает замыкание множества всех прямых (p,q) с $p, q \in X$ и $p \neq q$, а $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что:

а) $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2 \dim X$

б) $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leqslant 2 \dim X + 1$

в) если X — не содержащаяся в плоскости кривая, то $\dim S(X) = 3$.

---

[1] Т. е. локализация координатной алгебры $\Bbbk[X]$ по мультипликативной системе всех неделителей нуля.

[2] Т. е. лежащего в некотором открытом по Зарисскому плотном подмножестве грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, V)$, параметризующего все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

[3] ПОДСКАЗКА: рассмотрите многообразие $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$, с помощью проекции $\Gamma \to X$ установите его проективность, неприводимость и найдите размерность, затем примените проекцию $\Gamma \to \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$.