Многочлены и аффинные алгебраические многообразия.

Обозначения. Для многочленов $f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ и $g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$ произведения $R(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} a_n^m b_m^n \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$ и $D(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_n^{2n-2} \prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ называются соответственно *результантом* этих многочленов и *дискриминантом* многочлена f. Для идеала $I \subset A$ положим $\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$. Для подмножества $X \subset \mathbb{A}^n$ и идеала $J \subset \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ положим $I(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk[x_1,\dots,x_n] \mid f(p) = 0 \ \forall\, p \in X\}$ и $V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \ \forall\, f \in J\}$.

А10◇1. Выразите: **а)** $D(f)$ через $R(f,f')$ **б)** $D(fg)$ через $D(f)$, $D(g)$ и $R(f,g)$.

А10◇2. Исключите x из систем уравнений: **а)** $5x^2-6xy+5y^2-16 = 2x^2-xy+y^2-x-y-4 = 0$ **б)** $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3 = 9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5 = 0$.

А10◇3. Вычислите дискриминанты многочленов: **а)** $\sum_{k=0}^{n} x^k$ **б)** $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ **в)** $x^n + a$.

А10◇4*. Вычислите **а)** результанты **б)** дискриминанты круговых многочленов.

А10◇5. Пусть $f, g \in \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ и поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Покажите, что если f обращается в нуль на $V(g)$, то каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит f.

А10◇6. Для пары идеалов I, J кольца $A = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ положим $K = \{ab \mid a \in I,\, b \in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что **а)** $K = IJ$ **б)** $K = I \cap J$ **в)** $IJ = I \cap J$ **г)** $1 \in I + J \Rightarrow IJ = I \cap J$ **д)** $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$ **е)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **ж)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **з)** $(I = \sqrt{I}\ \&\ J = \sqrt{J}) \Rightarrow IJ = \sqrt{IJ}$.

А10◇7. Какие из следующих трёх колец нётеровы: **а)** $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$ **б)** $\{f(z) \in \mathbb{C}[[z]] \mid f$ сходится всюду в $\mathbb{C}\}$ **в)** $A[[t]]$, где A нётерово.

А10◇8. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x,y,z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x,y,z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

А10◇9. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для $J = (x^2+y^2-1, y-1) \subset \Bbbk[x,y]$.

А10◇10. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x,y,z]$ для **а)** $J = (xy, (x-y)z)$ **б)** $J = (xy+yz+zx, x^2+y^2+z^2)$

А10◇11. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$. Напишите систему уравнений, задающую $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$.

А10◇12. Для алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ положим[1] $\Bbbk[X] \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[x_1,\dots,x_n]/I(X)$. Для идеала $J \subset \Bbbk[X]$ положим $V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in X \mid f(p) = 0 \ \forall\, f \in J\}$. Для функции $f \in \Bbbk[X]$ положим $\mathcal{D}_f \stackrel{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f)$. Покажите, что

а) подмножества $V(J) \subset X$, отвечающие всевозможным идеалам $J \subset \Bbbk[X]$, составляют полный набор замкнутых множеств топологии[2] на X

б) подмножества $\mathcal{D}_f \subset X$ с $f \in \Bbbk[X]$ образуют для неё базис открытых множеств

в) любое открытое покрытие любого открытого $U \subseteq X$ содержит конечное подпокрытие.

А10◇13*. Для кольца A непрерывных[3] функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X выясните **а)** биективно ли отображение $X \to \operatorname{Spec}_m A$, $x \mapsto \ker \operatorname{ev}_x$ **б)** индуцирует ли топология Зарисского[4] на $\operatorname{Spec}_m A$ исходную топологию на X?

А10◇14. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Равносильна ли разложимость A в прямое произведение $A = A_1 \times A_2$ разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств?

---

[1] Это фактор кольцо называется *координатной алгеброй* многообразия X.

[2] Она называется *топологией Зарисского*.

[3] Вещественных или комплексных.

[4] Т. е. топология, базу замкнутых множеств которой составляют множества нулей непрерывных функций.