Расширения коммутативных колец.

В этом листке слово «кольцо» всюду означает *коммутативное кольцо с единицей*, и все гомоморфизмы колец предполагаются переводящими единицу в единицу.

А9⋄1. Пусть поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ имеет размерность $d < \infty$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Означает ли целость над $\mathbb{Z}$ числа $\xi \in \mathbb{F}$, что оператор умножения на ξ записывается целочисленной матрицей **а)** в каком-нибудь **б)** в любом базисе $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$? Покажите, что
в) кольцо целых $\mathcal{O}_\mathbb{F}$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем ранга d
г) билинейная *форма следа* $\mathrm{Sp} : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{Q}$, сопоставляющая числам $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ след оператора умножения на $\alpha\beta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $x \mapsto abx$, невырождена.

А9⋄2. Опишите кольцо целых над $\mathbb{Z}$ чисел поля $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$, где $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$ не делится на квадраты, и вычислите дискриминант[1] этого поля.

А9⋄3. Покажите, что любое факториальное[2] кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

А9⋄4. Выясните, цело ли
а) кольцо $\Bbbk[x, y]$ над подкольцом $\{f \in \Bbbk[x, y] \mid \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 0\}$.
б) кольцо непрерывных функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ над подкольцом функций f с $f(1, 0) = f(0, 1)$.

А9⋄5. Пусть $\Bbbk$ — поле. При каких условиях на $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ фактор кольцо $\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]/(f)$ цело над подкольцом $\Bbbk[x_1 + a_1x_0, \dots, x_n + a_nx_0]$?

А9⋄6. Пусть $\Bbbk$ — бесконечное поле, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ отличен от константы. Найдите $\operatorname{tr}\deg_\Bbbk \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$.

А9⋄7. Для нормального[3] кольца A с полем частных Q_A покажите, что **а)** произведение двух приведённых многочленов из $Q_A[x]$ лежит в $A[x]$ если и только если оба множителя лежат в $A[x]$ **б)** если элемент b какой-либо Q_A-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над Q_A лежит в $A[x]$ **в*)** кольцо $A[x]$ нормально.

А9⋄8. Верно ли, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных Q_A в любом конечном сепарабельном расширении[4] $L \supset Q_A$ конечно порождено как A-модуль?

А9⋄9. Покажите, что если фактор кольцо $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I$ является полем, то оно конечно.

А9⋄10. Пусть поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Покажите, что любая конечно порождённая $\Bbbk$-подалгебра $A \subset \mathbb{F}$ является полем, и $\dim_\Bbbk A \mid \dim_\Bbbk \mathbb{F}$.

А9⋄11. Покажите, что любой гомоморфизм кольца A в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ можно продолжить до гомоморфизма $B \to \Bbbk$ любого целого расширения $B \supset A$.

А9⋄12*. Покажите, что всякое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{C}$, базис которого как векторного пространства над $\mathbb{C}$ не более, чем счётен, совпадает с $\mathbb{C}$.

А9⋄13*. Выведите из зад. А9⋄12, что для любых многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ имеет место альтернатива: либо система уравнений $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ имеет решение в $\mathbb{C}^n$, либо существуют такие $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что $\sum f_i g_i = 1$.

А9⋄14*. Покажите, что неодномерный неприводимый комплексный характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.

---

[1]Т. е. определитель Грама формы следа в любом базисе кольца целых как модуля над $\mathbb{Z}$.

[2]Целостное кольцо называется *факториальным*, если каждый его необратимый элемент является произведением конечного числа неприводимых, и равенство таких произведений $p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ означает, что $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_i q_i$, где s_i обратимы. Например, поля, кольца главных идеалов и кольца многочленов над факториальными кольцами факториальны.

[3]Целостное кольцо называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных.

[4]Т. е. в таком поле $L \supset Q_A$, что размерность L как векторного пространства над Q_A конечна и минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in L$ над Q_A не имеет кратных корней ни в каком расширении поля Q_A.