Категории и функторы.

Обозначения. Через $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{C}mr$, $\mathcal{M}od_K$, $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$, $\mathcal{A}ss_{\Bbbk}$, A-$\mathcal{M}od$, $\mathcal{M}od$-A обозначаются категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец[1], модулей над коммутативным кольцом K, векторных пространств и ассоциативных алгебр над полем $\Bbbk$, левых и правых модулей над (некоммутативной) ассоциативной $\Bbbk$-алгеброй A. Категории функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и предпучков $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ обозначаются через $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ и $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{D})$.

А8◇1. Обозначим через Δ_{big} категорию всех конечных упорядоченных множеств и неубывающих отображений между ними, а через $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ её полную подкатегорию, состоящую из множеств $[n] \overset{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geqslant 0$. Покажите, что

а) категории Δ и Δ_{big} канонически эквивалентны

б) алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается тождественными морфизмами $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$, вложениями $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$, где $0 \leqslant i \leqslant n$ и образ не содержит i, и наложениями $s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1]$, где $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и $(i+1) \mapsto i$.

в*) Найдите образующие идеала соотношений между этими порождающими стрелками.

А8◇2. Для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h^X : Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$ и предпучок $h_X : Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$ переводят стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображения левого и правого умножения на эту стрелку:

$$\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2), \ \psi \mapsto \varphi \circ \psi$$
$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X), \ \psi \mapsto \psi \circ \varphi .$$

Проверьте, что сопоставления $X \mapsto h^X$ и $X \mapsto h_X$ задают вполне строгие функторы

$$\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et) \quad \text{и} \quad \mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{S}et) .$$

А8◇3 (точные функторы). Функтор $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ (соотв. $\mathcal{A}b^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что для любой группы $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}b$:

а) функтор $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N, для которой он не точен слева

б) функторы h^N и h_N точны слева, и предъявите группы N, для которых они не точны справа.

А8◇4. Опишите произведения и копроизведения в **а)** $\mathcal{S}et$ **б)** $\mathcal{T}op$ **в)** $\mathcal{M}od_K$ **г)** $\mathcal{G}rp$ **д)** $\mathcal{C}mr$.

А8◇5. Функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг к другу, если имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) .$$

Докажите, что у заданного функтора G тогда и только тогда есть левый сопряжённый функтор F, когда для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h_G^X : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ копредставим, и в этом случае $F(X)$ его копредставляет. Найдите двойственные необходимые и достаточные условия наличия правого сопряжённого у данного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

А8◇6. Предпучки $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*) друг к другу, если имеется функториальная по $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$

[1] С единицами и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу.

биекция $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big)$ (соотв. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C, G(D)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, F(C)\big)$).

а) Приведите примеры лево- и правосамосопряжённых предпучков.

б) Сформулируйте и докажите критерии существования лево- и правосопряжённых предпучков, аналогичные критериям из предыдущей задачи.

А8◇7. Для любого расширения $S \subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $\mathrm{res}_S^R : R\text{-}\mathcal{M}od \to S\text{-}\mathcal{M}od$.

А8◇8*. Сопоставим топологическому пространству X предпучок $S(X) : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящий $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ в множество непрерывных отображений $S_n(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, X)$ из стандартного правильного симплекса[2] $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в X, а неубывающей стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ правое умножение $f \mapsto f \circ |\varphi|$ на аффинное отображение $|\varphi| : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на вершины как φ. Покажите, что функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа к функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$.

А8◇9*. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ если и только если существуют естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, для которых композиции естественных преобразований[3] $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ равны тождественным эндоморфизмам функторов F и G.

[2]Т. е. выпуклой оболочки концов стандартных базисных векторов.

[3]Здесь $(F \circ s)_X \overset{\mathrm{def}}{=} F\left(s_X\right)$, $(t \circ F)_X \overset{\mathrm{def}}{=} t_{F(X)}$ и т. д.