Представления симметрических групп.

Обозначения. Основное поле $\Bbbk = \mathbb{C}$, через $C_\mu \subset S_n$ обозначается множество перестановок циклового типа μ, и $z_\mu \overset{\text{def}}{=} n!/|C_\mu| = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}$, где $m_i = m_i(\mu)$ это число строк длины i в μ. Для стандартного заполнения T диаграммы λ веса n через $R_T, C_T \subset S_n$ обозначаются подгруппы, переводящие в себя все строки (соотв. все столбцы) заполнения T. Мы полагаем $r_T \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in R_T} g$, $c_T \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in C_T} \operatorname{sgn}(g)\, g$, $s_T \overset{\text{def}}{=} r_T c_T$. Через V_λ обозначается простой S_n-подмодуль $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ в левом регулярном представлении, а через $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ — представление S_n, индуцированное тривиальным 1-мерным представлением R_T.

A7⋄1. Приведите в точное соответствие со стандартными представлениями V_λ геометрически заданные неприводимые представления **а)** S_3 и S_4 **б)** S_5.

A7⋄2. Покажите, что представление S_n левыми умножениями **а)** в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$ **б)** в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, c_T$ индуцировано со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

A7⋄3. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

A7⋄4*. Установите для $(n-1)$-мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы **а)** $\Lambda^k V_\Delta \simeq V_{((n-k),\, 1^k)}$ **б)** $V_\Delta^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C} \oplus V_\Delta \oplus V_{((n-2),2)} \oplus V_{((n-2),1,1)}$.

A7⋄5*. Покажите, что **а)** $\chi_{((n-2),1,1)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} - m_2$ **б)** $\chi_{((n-2),2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} + m_2 - 1$

A7⋄6. С какой кратностью входят в индуцированное одномерным представлением максимального цикла умножением на $e^{2\pi i/n}$ **а)** знаковое **б)** симплициальное представления?

A7⋄7*. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на максимальном цикле равно **а)** $(-1)^k$ для $\lambda = \big((n-k),\, 1^k\big)$ **б)** 0 для всех прочих λ.

A7⋄8*. Пусть диаграмма $\lambda = \lambda^t$ образована k симметричными крюками с вершинами на главной диагонали и строго убывающими длинами $\gamma_i = 2(\lambda_i - i + 1) - 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\gamma) = (-1)^{(n-k)/2}$.

A7⋄9. Покажите, что неприводимое представление V_μ группы S_m входит в разложение представления, индуцированного неприводимым представлением V_ν подгруппы $S_n \subset S_m$ если и только если $\mu \supset \nu$, причём его кратность равна числу таких заполнений косой диаграммы $\mu \smallsetminus \nu$ числами от 1 до $m-n$ без повторений, что эти числа строго возрастают по строкам и столбцам.

A7⋄10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про ограничения неприводимых представлений.

A7⋄11. Покажите, что M_λ и $M_\lambda \otimes V_{(1^n)}$ имеют единственное общее неприводимое слагаемое, и что оно изоморфно V_λ.

A7⋄12. Покажите, что $[V_\nu] \cdot [V_{(1^n)}] = \oplus V_\mu$, где μ пробегает множество диаграмм, которые можно получить из ν добавлением n клеток так, чтобы никакие 2 не попали в одну строку.

A7⋄13. Покажите, что **а)** V_λ входит в $V_\mu \otimes V_\nu$ с кратностью $\sum_\eta z_\eta^{-1} \chi_\lambda(C_\eta)\chi_\mu(C_\eta)\chi_\nu(C_\eta)$ причём эта кратность равна **б)** $\delta_{\mu,\nu}$ для $\lambda = (n)$ **в)** δ_{μ,ν^t} для $\lambda = (1^n)$.

A7⋄14* (формула Фробениуса). Докажите, что $\dim V_\lambda = n! \cdot \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j) / \prod_k \eta_k!$, где $n = |\lambda|$, $\eta_i = \lambda_i + \ell - 1$, а ℓ — число строк в диаграмме λ.

A7⋄15* (формула крюков). Докажите, что $\dim V_\lambda = n! / \prod_{a\in\lambda} \Gamma(a)$, где $n = |\lambda|$, а $\Gamma(a)$ — количество клеток в крюке, образованном клеткой $a \in \lambda$, всеми клетками того же столбца снизу от a и всеми клетками той же строки справа от a.

A7⋄16*. Докажите, что $\dim V_\lambda < |\lambda|$ только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у представления $V_{(2,2)}$ группы S_4 и представлений $V_{(2,2,2)}$ и $V_{(3,3)}$ группы S_6.

Персональный табель ____. **Листок № 7 (1 декабря 2021)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
2а			
б			
3			
4а			
б			
5а			
б			
6а			
б			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12			
13а			
б			
в			
14			
15			
16			