Больше о представлениях конечных групп

A6◇1. Покажите, что на каждом вещественном (соотв. комплексном) конечномерном представлении конечной группы G можно ввести G-инвариантное евклидово (соотв. эрмитово) скалярное произведение. Выведите отсюда полную приводимость таких представлений.

A6◇2*. Опишите все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения.

A6◇3. Покажите, что $R(G_1 \times G_2) = R(G_1) \otimes_{\mathbb{Z}} R(G_2)$, где $R(G) \subset \mathbb{C}^G$ обозначает кольцо комплексных представлений[1] конечной группы G.

A6◇4. Пусть пересечение класса сопряжённости $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ является объединением $D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_s$ классов H-сопряжённости. Для заданного характера χ подгруппы H выразите значение индуцированного им характера группы G на классе C через значения $\chi(D_i)$, порядки $|D_i|$ и индекс $[G : H]$.

A6◇5. Опишите комплексное представление группы S_4, индуцированное **а)** двумерным неприводимым представлением подгруппы $S_3 = \mathrm{Stab}(4)$ **б)** 1-мерным представлением 4-цикла умножением на $\sqrt[4]{1}$ **в)** 1-мерным представлением 3-цикла умножением на $\sqrt[3]{1}$.

A6◇6 (аффинная группа прямой). Рассмотрим группу A всех биективных преобразований $x \mapsto ax + b$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. **а)** Покажите, что $A = \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^*$, где $\mathbb{F}_p \subset A$ — подгруппа сдвигов, а $\mathbb{F}_p^* \subset A$ — подгруппа растяжений относительно начала координат, и перечислите классы сопряжённости в A. **б)** Вычислите характер представления группы A в пространстве функций $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений. Убедитесь, что оно неприводимо и индуцировано одномерным представлением подгруппы сдвигов с характером $\mathbb{F}_p \to \mathrm{U}_1$, $t \mapsto e^{2\pi i t/p}$. **в)** Покажите, что все остальные неприводимые представления группы A одномерны и вычислите их характеры.

A6◇7 (группа Гейзенберга). Для простого $p > 2$ и n-мерного векторного пространства L над полем $\mathbb{F}_p$ *группа Гейзенберга* H_p^n состоит из троек $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией $(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2))/2,\ u_1 + u_2,\ u_1^* + u_2^*)$. Обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу всех троек вида $(x, u, 0)$. **а)** Проверьте, что H_p^n действительно группа и перечислите её классы сопряжённости. **б)** Убедитесь, что H_p^1 изоморфна группе верхних унитреугольных 3×3 матриц над $\mathbb{F}_p$. **в)** Покажите, что для каждого $a \in \mathbb{F}_p^*$ комплексное представление W_a группы H_p^n, индуцированное одномерным представлением подгруппы H' с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i a x/p}$, неприводимо, и все такие представления различны. Вычислите размерность и характер представления W_a. **г)** Покажите, что все остальные неприводимые представления группы H_p^n одномерны.

A6◇8 (группа Гейзенберга 2). При $p = 2$ обозначим через H группу с $4n + 4$ образующими $\pm 1, \pm u_1, \ldots, \pm u_{2n+1}$ и соотношениями $u_i^2 = -1$, $u_i u_j = -u_j u_i$ и «минус на минус даёт плюс». **а)** Убедитесь, что H состоит из 2^{2n+2} элементов $\pm u_I = \pm u_{i_1} \ldots u_{i_k}$, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$ пробегает всевозможные возрастающие поднаборы в $(1, \ldots, (n+1))$, включая $\varnothing$, для которого $u_\varnothing = 1$, и отвечающие индексам I чётной длины элементы $\pm u_I$ образуют в H подгруппу[2] H_2^n. **б)** Покажите, что группа H_2^1 изоморфна группе кватернионных единиц Q_8. Опишите **в)** центр **г)** классы сопряжённости **д)** неприводимые представления группы H_2^n.

A6◇9*. Покажите, что в разложениях тензорных степеней любого эффективного представления конечной группы встречаются все неприводимые представления этой группы.

A6◇10*. Покажите, что каждый неодномерный неприводимый характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.

---

[1] Т. е. целочисленная линейная оболочка комплексных неприводимых характеров.

[2] Она называется *группой Гейзенберга* для $p = 2$.

Персональный табель ______________________________. **Листок № 6 (4 ноября 2021)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
6а			
б			
в			
7а			
б			
в			
г			
8а			
б			
в			
г			
д			
9			
10			