

Маленькие линейные представления

- A5♦1.** Постройте приводимое неразложимое представление аддитивной группы \mathbb{Z} .
- A5♦2.** Опишите все ассоциативные \mathbb{R} -подалгебры с единицей размерности > 31 в $\text{Mat}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$.
- A5♦3.** Пусть конечная группа G действует на $V = \mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. Как связано значение характера¹ $\chi_V(g)$ с числом неподвижных точек перестановки g ?
- A5♦4.** Выразите через характеры χ_U и χ_W представлений U и W конечной группы G характер представления **а)** $U \oplus W$ **б)** $U \otimes W$ **в)** U^* **г)** $\text{Hom}(U, W)$ **д*)** $\chi_{\Lambda^n U}$ **е*)** $\chi_{S^n U}$.
- A5♦5.** Покажите, что **а)** $\chi_{S^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2))/2$ **б)** $\chi_{\Lambda^2 U}(g) = (\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2))/2$.
- A5♦6.** Для произвольного линейного представления группы S_3 выясните, какими могут быть собственные значения всех операторов из группы и куда может переводить оператор трансформации собственные подпространства оператора 3-цикла.
- A5♦7.** Перечислите все неприводимые представления группы S_3 и найдите их характеры.
- A5♦8.** Пусть V — двумерное неприводимое представление группы S_3 . **а)** Верно ли, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где R — регулярное представление? **б)** Разложите все $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений. **в)** Опишите подалгебру S_3 -инвариантов в алгебре S^*V . **г)** Вычислите характеры всех $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые. **д)** Покажите, что $S^2(S^3(V)) \simeq S^3(S^2(V))$ **е*)** Изоморфны ли $S^k(S^m(V))$ и $S^m(S^k(V)) \forall k, m$?
- A5♦9.** Опишите все неприводимые представления группы диэдра D_n и их характеры.
- A5♦10.** Вычислите характеры следующих представлений группы S_4 : тривиального, знакового, 2-мерного посредством эпиморфизма на группу треугольника и двух 3-мерных — собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Перечислите неприводимые представления S_4 и разложите их на неприводимые представления подгруппы $S_3 = \text{Stab}(4) \subset S_4$.
- A5♦11.** Перечислите неприводимые представления группы A_4 , вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления S_4 раскладываются на неприводимые при ограничении на A_4 .
- A5♦12.** Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве \mathbb{C} -значных функций на множестве его **а)** вершин **б)** рёбер **в)** граней.
- A5♦13.** На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 — как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел с четырёх соседних граней. Вычислите с точностью до 10^{-3} , что будет написано на гранях после 2021 хода. Зависит ли ответ от начальной расстановки чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6?
- A5♦14.** Найдите размерности, характеры и разложения на приводимые следующих представлений группы S_5 : **а)** тривиального U , знакового U' , симплициального V , $V' = V \otimes U'$, $\Lambda^2 V$, $S^2 V$ **б)** представления W в функциях $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5) \rightarrow \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений посредством изоморфизма $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$, $W' = W \otimes U'$, $S^2 W$, $\Lambda^2 W$, $V \otimes W$.
- A5♦15.** Опишите все неприводимые представления группы A_5 , вычислите их характеры и выясните, как раскладываются при ограничении на A_5 неприводимые представления S_5 .
- A5♦16.** Решите аналоги [зад. A5♦12 а\) б\) в\)](#) для собственной группы икосаэдра.
- A5♦17.** Составьте таблицы неприводимых характеров группы: **а)** кватернионных единиц **б)** $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ **в)** верхних унитарных матриц $H(\mathbb{F}_3) \subset \text{SL}_3(\mathbb{F}_3)$.

¹Характером линейного представления $\rho : M \rightarrow \text{End}(V)$ множества операторов M в конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{k} называется функция $\chi_V : M \rightarrow \mathbb{k}, g \mapsto \text{tr } \rho(g)$.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
13			
14а			
б			
15			
16а			
б			
в			
17а			
б			
в			