

## Симметрические функции

- A3♦1.** Сумма двух из корней многочлена  $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$  в поле  $\mathbb{C}$  равна 1. Найдите  $\lambda$ .
- A3♦2.** Решите в поле  $\mathbb{C}$  систему уравнений  $x_1 + x_2 + x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ,  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24$ .
- A3♦3.** Выразите через элементарные симметрические многочлены  $e_i$  функции:  
 а)  $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$  б)  $\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$   
 в)  $\sum_{i \neq j \neq k \neq i} x_i(x_j + x_k)$  г)  $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)$
- A3♦4.** Выразите дискриминант<sup>1</sup>  $D_f$  кубического трёхчлена  $f = x^3 + px + q$  через  $p$  и  $q$ .
- A3♦5.** Пусть в зад. A3♦4  $p, q \in \mathbb{R}$ . Покажите, что при  $D_f < 0$  у  $f$  есть ровно один вещественный корень, а при  $D_f > 0$  — ровно три, и в этом случае уравнение  $f = 0$  перескалированием переменной приводится к виду  $4t^3 - 3t = a$  и решается в тригонометрических функциях.
- A3♦6.** Найдите все  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых многочлен  $x^4 - 4x + \lambda$  имеет кратный корень.
- A3♦7 (циркулянт).** Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ , через значения полинома  $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$  на комплексных корнях  $n$ -той степени из единицы.
- A3♦8.** Вычислите дискриминант  $n$ -того кругового многочлена<sup>2</sup>  $\Phi_n(x)$ . Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для всех  $n = 3, 4, 5, 6, 7$ .
- A3♦9.** Многочлен  $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  имеет корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Всякий ли симметрический многочлен от  $x_2, \dots, x_n$  переписывается в виде многочлена от  $x_1$ ?
- A3♦10.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C}$  порождает мультипликативную группу корней  $m$ -той степени из 1.  
 а) Для каждого  $a \in \mathbb{C}$  раскройте скобки и приведите подобные в  $\prod_{v=1}^m (a - \zeta^{v-1} x)$ .  
 б) Покажите, что  $\forall f \in \mathbb{C}[x] \exists h \in \mathbb{C}[x]: \prod_{v=1}^m f(\zeta^{v-1} x) = h(x^m)$ .  
 в) Выразите корни многочлена  $h$  через корни многочлена  $f$ .
- A3♦11.** Найдите в  $\mathbb{C}[x]$  многочлен 4-й степени, корнями которого являются  
 а) квадраты всех комплексных корней многочлена  $x^4 + 2x^3 - x + 3$   
 б) кубы всех комплексных корней многочлена  $x^4 - x - 1$ .
- A3♦12.** Выразите а)  $s_{(1^n)}$  через  $e_v$  б)  $s_{(n)}$  через  $h_v$ .
- A3♦13.** Представьте а)  $s_{(1)}^2$  б)  $s_{(1,1)} \cdot s_{(2)}$  в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов  $s_\lambda$ .
- A3♦14\*.** Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов  $n \times n$  матрицы  $A$  выполняется равенство  $\ln \det(E - A) = \text{tr} \ln(E - A)$ , а для всех достаточно малых комплексных матриц  $A$  оно выполняется даже и численно.
- A3♦15\*.** Пусть  $h_0 = e_0 = 1$  и  $h_k = e_k = 0$  при  $k < 0$ . Покажите, что матрицы  $(h_{i-j})$  и  $((-1)^{i-j} e_{i-j})$  обратны друг другу и получите отсюда соотношение

$$\det(h_{\lambda_i + j - i}) = \det(e_{\lambda_i + j - i})$$

на дополнительные миноры этих матриц.

<sup>1</sup>Дискриминантом приведённого многочлена  $f(x) = \prod(x - x_i)$  степени  $n$  называется произведение  $\binom{n}{2}$  квадратов разностей его корней  $D_f \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_8^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$ , выраженное через коэффициенты многочлена.

<sup>2</sup> $n$ -тым круговым многочленом называется приведённый многочлен степени  $\varphi(n)$ , корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени  $n$  из единицы

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10а			
б			
в			
11а			
б			
12а			
б			
13а			
б			
14			
15			