Тензорная, симметрическая и грассманова алгебры

Обозначения. Всюду в этом листке речь идёт про конечномерные векторные пространства V над произвольным полем $\Bbbk$. Через $\mathrm{Sym}^n V$, $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ обозначаются подпространства симметричных и кососимметричных тензоров, а через $S^n V = V^{\otimes n}/\mathcal{J}_{\mathrm{symm}} \cap V^{\otimes n}$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/\mathcal{J}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}$ — фактор пространства по соотношениям коммутирования и антикоммутирования соответственно[1].

А1⋄1. Над полем характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \dots \times V \to \Bbbk$ **б)** функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат в каком-нибудь базисе пространства V **в)** $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^n V)^*$ **е)** $(S^n V^*)$. Какие из них остаются изоморфизмами в конечной характеристике?

А1⋄2. Над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами **а)** кососимметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \dots \times V \to \Bbbk$ **б)** $\mathrm{Alt}^n(V^*)$ **в)** $\mathrm{Alt}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^n V)^*$ **д)** $(\Lambda^n V^*)$. Какие из них остаются изоморфизмами в конечной характеристике?

А1⋄3 (спинорное разложение). Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$, $U = \Bbbk^2$ и $V = \mathrm{End}(U)$. Покажите, что **а)** $V^{\otimes 2} \simeq S^2V \oplus \Lambda^2 V$ **б)** $S^2V \simeq (S^2U \otimes S^2U^*) \oplus (\Lambda^2U \otimes \Lambda^2U^*)$ **в)** $\Lambda^2 V \simeq (S^2U \otimes \Lambda^2U^*) \oplus (\Lambda^2U \otimes S^2U^*)$.

А1⋄4. Укажите в $V^{\otimes 3}$ тензор, не равный сумме кососимметричного и симметричного.

А1⋄5 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространство $\mathrm{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes v$ с $v \in V$ и явно выразите через них тензор $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u \in \mathrm{Sym}^3(V)$. Порождается ли $S^n V$ полными n-ми степенями v^n векторов $v \in V$?

А1⋄6. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

А1⋄7. Выясните, разложима ли в произведение трёх линейных форм от ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 грассманова кубическая форма $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\,\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\,\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$, и если да, выпишите такое разложение явно.

А1⋄8. Существуют ли такие ненулевые линейные операторы $F_1, \dots, F_m : V \to V$ и ненулевой набор констант $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Bbbk^m$, что $\lambda_1 F_1^{\otimes n} + \dots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$?

А1⋄9. Для линейного оператора $F : V \to V$ выразите через коэффициенты характеристического многочлена $\chi_F(t)$ числа: **а)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 2}$ **б*)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г*)** $\det F^{\otimes 3}$, а для обратимого F — след и определитель действия F **д*)** на $\mathrm{Hom}(V, V)$ по правилу $G \mapsto FGF^{-1}$ **е*)** на S^2V^* по правилу $Ff(v) = f(F^{-1}v)$.

А1⋄10. Для диагонализуемого оператора F над полем характеристики нуль выразите собственные числа операторов S^nF и Λ^nF через собственные числа F и докажите следующие тождества в $\Bbbk[\![t]\!]$: **а)** $\det(E - tF)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{tr}(S^kF)\,t^k$ **б)** $\det(E + tF) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{tr}(\Lambda^kF)\,t^k$, где $S^kF : v_1 \cdots v_k \mapsto F(v_1) \cdots F(v_k)$ и $\Lambda^kF : v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto F(v_1) \wedge \ldots \wedge F(v_k)$.

А1⋄11*. Верны ли тождества из зад. А1⋄10 также и для недиагонализуемых F?

А1⋄12*. Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — любой, а $E : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — тождественный линейные операторы. Докажите, что в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ выполняется равенство $e^{F\otimes E + E \otimes F} = e^F \otimes e^F$.

А1⋄13*. Докажите, что $\det(\alpha A + \beta B) = \sum_{p+q=n} \mathrm{tr}(\Lambda^pA \cdot \Lambda^qB)\,\alpha^p\beta^q$ для всех чисел $\alpha, \beta \in \Bbbk$ и матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, где Λ^pA и Λ^qB — квадратные матрицы размера $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, клетки которых занумерованы возрастающими p-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в IJ-той клетке у Λ^pA находится IJ-тый $p\times p$ минор матрицы A, а у Λ^qB — дополнительный к IJ-му $p \times p$ минору $q \times q$ минор матрицы B.

[1] Т. е. однородные компоненты степени n в симметрической и грассмановой алгебрах пространства V.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (15.09.2021)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
д			
е			
2а			
б			
в			
г			
д			
3а			
б			
в			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
г			
д			
е			
10а			
б			
11			
12			
13			