Тензорные произведения

А1◇1. Для любых модулей над произвольным коммутативным кольцом K с единицей постройте канонические изоморфизмы
а) $(M \oplus N) \otimes L \simeq (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)$ **б)** $\mathrm{Hom}(M \oplus N, L) \simeq \mathrm{Hom}(M, L) \oplus \mathrm{Hom}(N, L)$
в) $\mathrm{Hom}(L, M \oplus N) \simeq \mathrm{Hom}(L, M) \oplus \mathrm{Hom}(L, N)$ **г)** $\mathrm{Hom}(L \otimes M, N) \simeq \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Hom}(M, N))$.

А1◇2. Найдите каноническое разложение в прямую сумму циклических групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/(p^m)$ для групп **а)** $\mathbb{Z}/(18) \otimes \mathbb{Z}/(12)$ **б)** $\mathbb{Z}/(6) \otimes \mathbb{Z}/(8)$ **в)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(24))$ **г)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(24), \mathbb{Z}/(18))$.

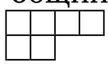
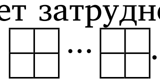
Всюду далее речь идёт про конечномерные векторные пространства над произвольным полем $\Bbbk$.

А1◇3. Верно ли, что среди векторов $v_1, \dots, v_n$, лежащих соответственно в пространствах $V_1, \dots, V_n$, тогда и только тогда есть нулевой вектор, когда все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ зануляются на наборе $(v_1, \dots, v_n)$?

А1◇4. Пользуясь каноническим изоморфизмом $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$, запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Запишите аналогичным образом их композицию $BA \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

А1◇5. Рассмотрим двойственные друг другу базисы из векторов $e_i \in V$ и ковекторов $x_i \in V^*$. В какой оператор переходит при изоморфизме из зад. А1◇4 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i$?

А1◇6. Отображение $\tau : \mathrm{Hom}(V, V) \simeq V^* \otimes V \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V, V)^*$, переводящее $\xi \otimes v$ в линейную форму, значение которой на $v' \otimes \xi'$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$, задаёт на пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ корреляцию. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V, V)$ она отвечает? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли? Как она записывается в терминах матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

А1◇7. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа **а)**  **б)**  **в)** .

А1◇8. Пусть операторы $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $g : \Bbbk^m \to \Bbbk^m$ диагонализуемы с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$. Найдите все собственные значения $f \otimes g$ и их кратности.

А1◇9. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонические изоморфизмы
а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$
б) $\mathrm{Hom}\big(U \otimes \mathrm{Hom}(U, W),\, W\big) \simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(U,\, \mathrm{Hom}(U, W)^* \otimes W\big)$
в) $\mathrm{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(U, W)\big)$.

А1◇10*. В какое линейное отображение $\mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ переходит в зад. А1◇9 (в) тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$?

А1◇11*. Какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ отвечает в зад. А1◇9 (б) отображение $c : U \otimes \mathrm{Hom}(U, W) \to W$, $u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$? Как устроено ядро соответствующего им линейного оператора $U \to \mathrm{Hom}(U, W)^* \otimes W$?

А1◇12. Постройте канонические изоморфизмы пространства n-форм $V^* \times \dots \times V^* \to \Bbbk$
а) с пространством $V^{\otimes n}$ **б)** с пространством, двойственным к $V^{*\otimes n}$.

А1◇13. Фиксируем ненулевой ковектор $\xi \in V^*$. Оператор $i_\xi : V^{\otimes(n+1)} \to V^{\otimes n}$, двойственный[1] оператору $\mu_\xi : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n+1)}$, $\tau \mapsto \xi \otimes \tau$, называется *внутренним умножением* на ξ. Явно опишите его действие на заданную n-линейную форму $w : V^* \times \dots \times V^* \to \Bbbk$. Для каких V, n и ξ оператор i_ξ не эпиморфен?

А1◇14. Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u, v, w \in V$ **а)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$ **б)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$ **в)** $\varphi(u, u, u) = 0$ **г)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$ **д*)** $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$ **е*)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$ **ж*)** $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.

[1] При каноническом отождествлении $V^{\otimes n}$ с $\left(V^{*\otimes n}\right)^*$ из зад. А1◇12.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 1 (8.09.2021)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
8			
9а			
б			
в			
10			
11			
12а			
б			
13			
14а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			