§11. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнутым.

11.1. Определения и примеры. В дифференциальной геометрии и топологии многообразия определяются как топологические пространства, в которых каждая точка обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некой стандартной модели — «локальной карте», и любые две такие карты должны быть регулярно согласованы на их пересечении. Алгебраические многообразия определяются аналогичным образом, только в качестве стандартных локальных карт допускаются произвольные[1] аффинные алгебраические многообразия, а регулярность согласования двух таких карт на их пересечении означает, что переход от одной карты к другой задаётся рациональными функциями. Точные определения таковы. Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$, где X_U — аффинное алгебраическое многообразие, рассматриваемое с топологией Зарисского, а $U \subset X$ — открытое подмножество, рассматриваемое с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки* $\varphi_{WU} \overset{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U\big|_{\varphi_U^{-1}(U\cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$, который отождествляет между собою лежащие в аффинных алгебраических многообразиях X_U и X_W прообразы пересечения $U \cap W$, регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\varphi_{WU}^* : \Bbbk\left[\varphi_W^{-1}(U \cap W)\right] \xrightarrow{\sim} \Bbbk\left[\varphi_U^{-1}(U \cap W)\right], \quad f \mapsto f \circ \varphi_{WU},$$

является изоморфизмом алгебры регулярных на $\varphi_U^{-1}(U\cap W)$ рациональных функций на X_U с алгеброй регулярных на $\varphi_W^{-1}(U\cap W)$ рациональных функций на X_W. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Пример 11.1 (проективные пространства)

Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\Bbbk^{n+1}\right)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ обладает алгебраическим атласом из $n+1$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство, координаты в котором будем записывать как[2] $t_i = (t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n})$. Отображение

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i, \quad t_i \mapsto (t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n}), \tag{11-1}$$

биективно, и прообраз $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset X_i$ представляет собою главное открытое множество

$$\mathcal{D}(t_{i,j}) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}].$$

[1] В том числе не гладкие — такие, как крест $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(\Bbbk[x,y]/(xy))$.

[2] Первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i-той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$.

Отображение склейки $\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1}\varphi_i : \mathcal{D}(t_{i,j}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(t_{j,i})$ действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Упражнение 11.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i посредством биекции (11-1) задаёт на пересечениях $U_i \cap U_j$ согласованные индуцированные топологии и корректно наделяет $\mathbb{P}_n$ топологией, в которой все отображения (11-1) становятся гомеоморфизмами.

Пример 11.2 (грассманианы)

Точками грассманова многообразия $\mathrm{Gr}(k,m)$ являются k-мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$. Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\mathrm{GL}_k(\Bbbk)$ левыми умножениями. При этом подпространству $W \subset \Bbbk^n$ отвечает орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$ базисных векторов какого-нибудь базиса в W, и действие $\mathrm{GL}_k(\Bbbk)$ заключается в замене базиса в W. Грассманиан $\mathrm{Gr}(k,m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I, занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$. Если обозначить через $s_I(x)$ подматрицу матрицы x, образованную столбцами с номерами из I, то $U_I = \{x \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\Bbbk) \mid \det s_I(x) \neq 0\}$.

Упражнение 11.2. Убедитесь, что карта U_I состоит из всех k-мерных подпространств $W \subset \Bbbk^m$, которые изоморфно проектируются на k-мерную координатную плоскость, натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$ пространства $\Bbbk^m$, вдоль дополнительной $(m-k)$-мерной координатной плоскости, натянутой на остальные базисные векторы.

Обозначим через $X_I \simeq \mathrm{Mat}_{k\times(m-k)}(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m-k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\hat{I} = \{1, \dots, m\} \smallsetminus I$. Отображение $\varphi_I : X_I \xrightarrow{\sim} U_I$, превращающее $k\times(m-k)$-матрицу $t \in X_I$ в $k\times m$-матрицу $\varphi_I(t)$ дописыванием к ней единичной $k\times k$-матрицы в столбцы с номерами из I, биективно, и $\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) = \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big)$ является главным открытым подмножеством в X_I.

Упражнение 11.3. Убедитесь, что отображение $\varphi_J^{-1}\varphi_I : \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \to \mathcal{D}\Big(\det s_I\big(\varphi_J(t)\big)\Big)$ действует по формуле $t \mapsto s_{\hat{J}}\Big(s_J^{-1}\big(\varphi_I(t)\big) \cdot \varphi_I(t)\Big)$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(k,n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что $\mathrm{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$.

Пример 11.3 (прямое произведение многообразий)

Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U\times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset X$ на X, Y.

11.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке p алгебраического многообразия X, если существуют такие аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и рациональная функция $\tilde{f} \in \Bbbk(X_U)$, что $p \in U$, $\varphi_U^{-1}(p) \in \mathrm{Dom}\,\tilde{f}$ и $\tilde{f}(x) = \varphi_U^* f(x)$ для всех $x \in \mathrm{Dom}\,\tilde{f}$. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке $p \in U$, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется кольцом *локальных регулярных функций* на U. Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ является пучком $\Bbbk$-алгебр на топологическом пространстве X в смысле прим. 8.8 на стр. 113. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если для каждой точки $x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

Упражнение 11.4. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \Bbbk[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U.

11.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U, т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U)$, где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций[1], тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты

$$\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$$

образуют алгебраический атлас на Z. Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке $\Bbbk$-алгебр $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V\left(\mathcal{I}_Z\right)$.

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X)$ является замкнутым подмногообразием в Y и $\varphi : X \xrightarrow{\sim} \varphi(X)$ является изоморфизмом алгебраических многообразий. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле n° 10.1 на стр. 137, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

Пример 11.4 (семейства подмногообразий)
Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств*[2], если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

11.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i$, $i = 0, 1$. Пересечение $U_0 \cap U_1$ видно внутри каждой карты как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

[1] Ср. с упр. 11.4.

[2] Или *морфизмом над* Y.

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t\,. \tag{11-2}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t\,, \tag{11-3}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

————:———— .

Такая патология называется *неотделимостью*. Она возникла потому, что правило склейки (11-3) не замкнуто и продолжается по непрерывности с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$. Говоря более формально, включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \times U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$. Правило (11-2) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и таким образом отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq \left(U_0 \times U_1\right) \cap \Delta$ с гиперболой $xy = 1$, которая является *замкнутым* подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$. Правило (11-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t,t)$, образ которого не замкнут в $\mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

Пример 11.5 (график морфизма)
Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается

$$\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}\,.$$

Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \operatorname{Spec_m}(A) \to \operatorname{Spec_m}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

11.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Рациональное отображение $\psi : W \to Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U, называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \to Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ, называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Упражнение 11.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек. Найдите эти точки и опишите образ $\varkappa$.

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X» в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v, является сюрьективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

11.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в $\mathbb{P}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 11.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку грассманиан $\mathrm{Gr}(k, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ отображением Плюккера[1] и образ этого вложения описывается однородными квадратными уравнениями[2], все грассманианы являются проективными алгебраическими многообразиями.

Упражнение 11.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективными алгебраическим многообразием.

Пример 11.6 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, находятся в естественной биекции с точками проективного пространства $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, однако слой $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathcal{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*[3] в $\mathcal{B}_p$. Таким образом, раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E вместо точки p в пространство $\mathbb{P}_n$ таким образом, что приход в точку p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует многообразие $\mathcal{B}_p$ как *линейное расслоение* над проективным пространством E, слоем которого над точкой $q \in E$ служит прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E. Покажем, что $\mathcal{B}_p$ является проективным многообразием. Для этого выберем однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы точка $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, и отождествим E с гиперплоскостью $V(x_0) \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $t = \ell \cap V(x_0) = (0 : t_1 : \ldots : t_n)$.

[1] См. формулу (2-40) на стр. 35.
[2] См. формулу (2-38) на стр. 34.
[3] Вообще *дивизорами* (*Вейля*) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в n° 11.5 ниже).

Тогда коллинеарность точек p, q, t запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

на пару точек $(q,t) \in \mathbb{P}_n \times E$. По упр. 11.7 множество решений таких уравнений является проективным алгебраическим многообразием.

Лемма 11.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В обозначениях из прим. 11.1 на стр. 151 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\overline{f} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d, что $\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right)$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\overline{f}_{i,\alpha} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant n$ и при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i. Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ с картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением $\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0$, пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$ и для завершения доказательства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \overline{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\overline{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, ибо оно содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором многочлен $\overline{f}_{j,\beta}$ равен нулю. □

Пример 11.7 (иллюстрация доказательства лем. 11.1)

Проективное многообразие $X = V(x_0 x_1 x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых. В стандартных картах U_0, U_1, U_2 оно задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1}t_{0,2} = 0$, $t_{1,0}t_{1,2} = 0$, $t_{2,0}t_{2,1} = 0$. В предыдущем доказательстве этим уравнениям отвечают однородные многочлены $\overline{f}_{0,1} = x_1 x_2$, $\overline{f}_{1,1} = x_0 x_2$, $\overline{f}_{2,1} = x_0 x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0 x_1 x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен $x_0 x_1 x_2 = x_0 \cdot \overline{f}_{0,1} = x_1 \cdot \overline{f}_{1,1} = x_0 \cdot \overline{f}_{2,1}$.

11.3. Системы результатнтов. Рассматриваемые с точностью до пропорциональности ненулевые решения системы однородных полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\,, \end{cases} \tag{11-4}$$

где каждый $f_i \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однороден степени d_i, образуют проективное многообразие — пересечение проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. Проективные гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$. Наборы гиперповерхностей $(S_1, \dots, S_m)$ заданных степеней $d_1, \dots, d_m$ с непустым пересечением $\bigcap_i S_i \neq \varnothing$, составляют фигуру

$$\mathcal{R}(n+1;\ d_1, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)\,, \tag{11-5}$$

которая называется *результантным множеством* системы (11-4). Например, когда число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (11-4) превращается в систему однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ и имеет ненулевое решение если и только если $\det(a_{ij}) = 0$. Поэтому для $m = n+1$ и $d_1 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное множество является проективным алгебраическим многообразием, заданным одним полиномиальным уравнением на коэффициенты $a_{i,j}$ линейных форм $f_1, \dots, f_{n+1}$.

Покажем, что результантное множество (11-5) всегда является проективным алгебраическим многообразием, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_i, однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от числа переменных и набора степеней. Для этого рассмотрим идеал

$$J = (f_1, \dots, f_m) \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]\,.$$

Отсутствие у системы (11-4) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$ пусто или совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(J)$, и по теореме Гильберта о нулях существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_i^m \in J$ для все i. Наоборот, если J содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала J включает в себя уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (11-4) равносильно тому, что для некоторого m идеал J содержит все x_i^m. Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, лежит в J, т. е. J содержит все $S^d V^*$ с $d \gg 0$. Пересечение $J \cap S^d V^*$ является образом линейного отображения

$$\mu_d :\ S^{d-d_1}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \to S^d\,, \quad (g_1, \dots, g_m) \mapsto \sum g_\nu f_\nu\,, \tag{11-6}$$

задаваемого в стандартных базисах из мономов матрицей, ненулевые элементы которой суть коэффициенты многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (11-6) ведёт себя как $\sum_{\nu=1}^m \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$ и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$. Для всех таких d неэпиморфность отображения (11-6), т. е. неравенство $J \cap S^d V^* \neq S^d V^*$, равносильно обнулению всех максимальных миноров матрицы μ_d.

Итак, наличие ненулевых решений у системы (11-4) эквивалентно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц μ_d для всех таких d, что размерность левой части (11-6) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, называемой *системой результантов*.

Пример 11.8 (результант пары бинарных форм)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый однородный многочлен степени d от двух переменных $A(t_0, t_1) = a_0\, t_1^d + a_1\, t_0 t_1^{d-1} + \dots + a_{d-1}\, t_0^{d-1} t_1 + a_d\, t_0^d$ полностью раскладывается на линейные множители:

$$A(t_0, t_1) = \prod_{i=0}^{d} (\alpha_i'' t_0 - \alpha_i' t_1) = \prod_{i=0}^{d} \det \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix}$$

биективно соответствующие d нулям[1] $\alpha_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ многочлена A на проективной прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk)$. Коэффициенты многочлена A выражаются через однородные координаты его нулей по *формулам Виета* $a_k = (-1)^{d-k}\sigma_k(\alpha', \alpha'') \overset{\text{def}}{=} (-1)^{d-k} \sum_{\#I=k} \big(\prod_{i\in I} \alpha_i' \cdot \prod_{j\notin I} \alpha_j'' \big)$, где I пробегает все строго возрастающие подмножества из k индексов. В частности, a_k биоднороден бистепени $(k, d-k)$ по (α', α''). Для фиксированных степеней $m, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим в кольце многочленов $\Bbbk[\alpha', \alpha'', \beta', \beta'']$ от четырёх наборов переменных

$$\alpha' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n'),\ \alpha'' = (\alpha_1'', \dots, \alpha_n''),\ \beta' = (\beta_1', \dots, \beta_m'),\ \beta'' = (\beta_1'', \dots, \beta_m'')$$

произведение $R_{AB} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i,j} \left(\alpha_i' \beta_j'' - \alpha_i'' \beta_j' \right) = \prod_{j=1}^{n} A(\beta_j) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{m} B(\alpha_i)$. Оно обращается в нуль если и только если многочлены $A(t_0, t_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, t_0^i t_1^{n-i}$ и $B(t_0, t_1) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, t_0^j t_1^{m-j}$ с коэффициентами $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_i(\alpha', \alpha'')$ и $b_j = (-1)^{m-j}\sigma_j(\beta', \beta'')$ имеют общий нуль на $\mathbb{P}_1$. Многочлен $R_{A,B}$ биоднороден бистепени (mn, mn) по (α, β) и явно выражается через коэффициенты форм A, B по *формуле Сильвестра*

$$R_{AB} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} \tag{11-7}$$

В самом деле, линейное отображение (11-6) для векторного пространства V^* с базисом t_0, t_1 переводит пару однородных многочленов (h_1, h_2) в $Ah_1 + Bh_2$. При $d = m + n - 1$ оно имеет вид $\mu_{m+n-1} : S^{m-1}V^* \oplus S^{n-1}V^* \to S^{m+n-1}V^*$ и в стандартных базисах из мономов задаётся квадратной матрицей, транспонированной к матрице Сильвестра (11-7).

Упражнение 11.8. Убедитесь в этом.

[1]Эти нули не обязательно различны.

Если точка (α, β) лежит на квадрике $\alpha_i'\beta_j'' - \alpha_i''\beta_j' = 0$, то с точностью до постоянного множителя $(\alpha_i'' t_0 - \alpha_i' t_1) = (\beta_i'' t_0 - \beta_i' t_1)$. Так как эта линейная форма делит все многочлены вида $Ah_1 + Bh_2$, образ $\operatorname{im} \mu_{m+n-1} \neq S^{m+n-1}V^*$. Поэтому определитель Сильвестра (11-6) зануляется на каждой квадрике $\alpha_i'\beta_j'' - \alpha_i''\beta_j' = 0$. По теореме о нулях, некоторая степень многочлена $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. В силу неприводимости этих уравнений и факториальности кольца многочленов такое возможно только когда $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. Сравнение степеней и коэффициента при старшем мономе показывает, что частное равно 1.

Упражнение 11.9. Убедитесь в этом.

Таким образом, для пары бинарных форм результантное многообразие задаётся одним уравнением[1] $R_{AB} = 0$ на коэффициенты многочленов A, B. Многочлен $R_{A,B}$ называется *результантом* форм A и B. Если положить $t_0 = 1$, $t_1 = x$, мы получим результант двух неоднородных многочленов $A(x)$ и $B(x)$. В предположении, что $a_0 b_0 \neq 0$, такой результант обращается в нуль если и только если неоднородные многочлены A и B имеют общий корень в $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{(0 : 1)\}$.

11.4. Замкнутость проективных морфизмов. Геометрическим следствием алгебраичности результантного множества является замкнутость любого морфизма из проективного многообразия в любое отделимое алгебраическое многообразие. Неформально говоря, это означает, что проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 11.2
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ *замкнута*, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем на $\mathbb{P}_m$ однородные координаты x, а на $\mathbb{A}^n$ — аффинные координаты t. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x, t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается имеющая ненулевое решение система однородных уравнений $f_\nu(x, p) = 0$ на x. Это означает, что коэффициенты форм $f_\nu(x, p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

Следствие 11.1
Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$.
□

Следствие 11.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

Доказательство. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$, где $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ — график отображения $\varphi : X \to Y$. Если Z замкнуто в X, произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если Y отделимо, график Γ_φ тоже

[1] В прим. 11.10 на стр. 166 ниже мы обобщим этот результат на случай произвольной системы однородных полиномиальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

замкнут[1]. Если X проективно, проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. □

Следствие 11.3
Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для отображения $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными функциями $x_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Композиция регулярного отображения $X \to \mathbb{A}^1$ с вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярном несюрьективным отображением $X \to \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связен, он является точкой. □

11.4.1. Конечные проекции. Регулярное отображение $\varphi : X \to Y$ алгебраических многообразий называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле n° 10.5.3 на стр. 148. Из лем. 10.3 на стр. 148 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subsetneq X$ переходит в собственное замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subsetneq Y$.

Упражнение 11.10. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 11.1
Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Зафиксируем стандартную аффинную карту $U \subset H$ и такие однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ на $\mathbb{P}_n$, что $p = (1 : 0 : \dots : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \dots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)$. Пусть многообразие X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_\nu(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ является пересечением многообразия X с проколотым конусом C над U, образованным всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой[2] p. Конус C является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$: изоморфизм переводит точку $(u,t) \in U \times \mathbb{A}_1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u,t) уравнениями

$$f_\nu(tp + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\, t^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\, t^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,, \tag{11-8}$$

и является аффинным алгебраическим многообразием с координатной алгеброй $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u_1, \dots, u_{n-1}]/I$, где идеал I порождается многочленами $f_\nu(tp+u)$ из левых частей уравнений (11-8). Покажем, что алгебра $\Bbbk[Y]$ цела над подалгеброй $\Bbbk[U] = \Bbbk[u_1, \dots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\Bbbk[U]$ — тогда класс $t \pmod I$, являющийся его корнем, будет цел над $\Bbbk[U]$. Наличие в I такого многочлена равносильно тому,

[1] См. прим. 11.5 на стр. 154.
[2] Т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \Bbbk$.

что идеал, порождённый в $\Bbbk[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (11-8), содержит единицу. По теореме Гильберта это означает отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (11-8)

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0\,,$$

которые получаются ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0), имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p, что противоречит условию $p \notin X$. □

Следствие 11.4

Каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

Следствие 11.5

Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}_n$ в виде стандартной аффинной карты U_0, положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция многообразия $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \smallsetminus H_\infty$ в направлении вектора p и по предл. 11.1 является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюрьективен, повторяем процедуру. □

Упражнение 11.11. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\overline{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

Пример 11.9 (нормализация Нётер)

Рассмотрим отличный от константы многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ и запишем его в виде

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d\,,$$

где каждый f_k однороден степени k. Замыкание $\overline{X}$ аффинной гиперповерхности $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда $\mathbb{A}^n$ вложено в качестве стандартной карты U_0, задаётся однородным многочленом

$$\overline{f} = f_0 x_0^d + f_1 x_0^{d-1} + \cdots + f_{d-1} x_0 + f_d\,.$$

Бесконечно удалённая точка $p = (0 : p_1 : \dots : p_n) \notin \overline{X}$ если и только если $f_d(p_1, \dots, p_n) \neq 0$. Над бесконечным[1] полем $\Bbbk$ всегда существует такая точка вида $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$. Проекция π_p из неё на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в $\mathbb{A}^n$ как параллельная проекция вдоль вектора $(p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$ и действует по правилу $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + p_1 x_n, \dots, x_{n-1} + p_{n-1} x_n, 0)$. Её гомоморфизм подъёма $\pi_p^* : \Bbbk[t_1, \dots, t_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i + p_i x_n$. По предл. 11.1 алгебра $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$ цела[2] над $\Bbbk[t_1, \dots, t_{n-1}]$.

Упражнение 11.12. Явно предъявите уравнения целой зависимости для всех x_i.

[1] И даже не обязательно алгебраически замкнутым.

[2] Откуда следует, в частности, что $\operatorname{tr\,deg} \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f) = n - 1$.

Проекция π_p доминантна, так как точка $q \notin \pi_p(X)$ если и только если многочлен

$$f\left(q_1 + p_1x_n,\ q_2 + p_2x_n,\ \dots,\ q_{n-1} + p_{n-1}x_n, x_n\right) \in \Bbbk[x_n]$$

является ненулевой константой, что означает обращение в нуль всех его коэффициентов кроме свободного члена и происходит на собственном замкнутом подмножестве в $\mathbb{A}^{n-1}$. Из лем. 10.3 на стр. 148 следует, что проекция π_p сюрьективна. Мы заключаем, что каждая аффинная гиперповерхность над произвольным бесконечным полем допускает конечную сюрьективную параллельную проекцию на гиперплоскость.

Упражнение 11.13. Убедитесь в этом напрямую, без привлечения лем. 10.3.

Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*.

11.5. Размерность алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ определяется как максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subseteq X\,, \tag{11-9}$$

и обозначается $\dim_x X$. Если многообразие X неприводимо, в максимальная цепочке (11-9) с неизбежностью $X_n = X$. Если X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через точку x неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 11.14. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для всякой аффинной окрестности U точки x.

Предложение 11.2

Если многообразие Y неприводимо и имеется сюрьективный морфизм $\varphi : Y \twoheadrightarrow X$, то для любой точки $y \in Y$ выполняется неравенство $\dim_y Y \geqslant \dim_{\varphi(y)} X$.

Доказательство. Для любой цепочки (11-9) при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(X_i) \subset Y$ имеет неприводимую компоненту Y_i, которая отображается в X_i доминантно. Они составляют цепочку $\{y\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = Y$. □

Предложение 11.3

Для любого конечного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых многообразий и любой точки $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$, равенство в котором равносильно сюрьективности φ.

Доказательство. В силу упр. 11.14 можно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (11-9) в X по лем. 10.3 на стр. 148 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y, что даёт нужное неравенство, причём когда $\varphi(X) \neq Y$, это неравенство строгое. Если $\varphi(X) = Y$, то по предл. 11.2 имеется и противоположное неравенство. □

Следствие 11.6

В любой точке $x \in \mathbb{A}^n$ выполнено равенство $\dim_x \mathbb{A}^n = n$.

Доказательство. Так как в $\mathbb{A}^n$ имеется цепочка (11-9) из проходящих через x аффинных подпространств, $\dim_x \mathbb{A}^n \geqslant n$. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$. Если $\dim \mathbb{A}^{n-1} = n-1$, то беря конечную проекцию последнего отличного от $\mathbb{A}^n$

элемента максимальной цепочки (11-9), написанной для $X = \mathbb{A}^n$, на гиперплоскость в $\mathbb{A}^n$, мы заключаем из предл. 11.3, что его размерность, а значит и номер, не превосходит $n-1$. Поэтому $\dim_x \mathbb{A}^n = n$. □

Следствие 11.7
Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ. □

Следствие 11.8
Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности[1] алгебры $\Bbbk[X]$ над полем $\Bbbk$.

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюрьекции $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ задаёт целое расширение алгебр $\pi^* : \Bbbk[u_1, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow \Bbbk[X]$. Поэтому функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности алгебры $\Bbbk[X]$ над полем $\Bbbk$. □

Упражнение 11.15. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

11.5.1. Размерности подмногообразий. Если через точка x лежит сразу на нескольких неприводимых компонентах многообразия X и функция $f \in \Bbbk[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из них, имеющей максимальную размерность $\dim_x X$, то гиперповерхность $V(f) \subset X$ имеет в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X. Такое возможно, только когда f делит нуль в $\Bbbk[X]$.

Предложение 11.4
Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.

Доказательство. Мы можем и будем предполагать X аффинным. Случай $X = \mathbb{A}^n$ был разобран в прим. 11.9. Общий случай сводится к этому рассуждением, аналогичным использованному в доказательстве лем. 10.4 на стр. 149. Зафиксируем конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение $\varphi = \pi \times f : X \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$, $x \mapsto \big(\pi(x), f(x)\big)$. В лем. 10.4 мы видели, что оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена $\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение гиперповерхности $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(\alpha_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 11.3 $\dim V(f) = \dim V(\alpha_n) = m - 1 = \dim X - 1$. □

Следствие 11.9
Для любых функций $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ на аффинном алгебраическом многообразии X в каждой точке $p \in V(f_1, \dots, f_m) \subset X$ выполняется неравенство $\dim_p V(f_1, \dots, f_m) \geqslant \dim_p(X) - m$. Если при каждом i класс функции f_i не делит нуль в $\Bbbk[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$, это неравенство превращается в равенство[2].

[1] См. n° 9.4 на стр. 134.
[2] Последовательности функций с таким свойством называются *регулярными*

Предостережение 11.1. Предыдущее следствие вовсе не утверждает, что $V(f_1,\dots,f_m)\neq\varnothing$, и формально истинно при $V(f_1,\dots,f_m)=\varnothing$. Такое часто случается: например, $V(x,x+1)=\varnothing$ в $\mathbb{A}^3=\operatorname{Spec_m}\Bbbk[x,y,z]$. Из слабой теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $V(f_1,\dots,f_m)=\varnothing$ если и только если при некотором i класс f_i в $\Bbbk[X]/(f_1,\dots,f_{i-1})$ равен ненулевой константе.

Предложение 11.5
Для любых аффинных многообразий $X_1,X_2\subset\mathbb{A}^n$ в каждой точке $x\in X_1\cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1\cap X_2)\geqslant\dim_x(X_1)+\dim_x(X_2)-n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1: X_1\hookrightarrow\mathbb{A}^n$ и $\varphi_2: X_2\hookrightarrow\mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1\cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta\subset\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$ при отображении $\varphi_1\times\varphi_2: X_1\times X_2\hookrightarrow\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$. Внутри $X_1\times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1\times\varphi_2)^*(x_i)=(\varphi_1\times\varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i=y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 11.9. □

Предложение 11.6
Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1,X_2\subset\mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1)+\dim(X_2)\geqslant n$, то $X_1\cap X_2\neq\varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'', которые заметаются одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2. Эти конусы задаются теми же самыми уравнениями, что и многообразия X_1, X_2, только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные. Согласно предл. 11.5 $\dim_O(X_1'\cap X_2'')\geqslant\dim_O(X_1)+1+\dim_O(X_2)+1-n-1\geqslant 1$. Поэтому $X_1'\cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

11.5.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 11.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi: X\to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x\in X$ выполняется неравенство $\dim_x\varphi^{-1}(\varphi(x))\geqslant\dim X-\dim Y$, и существует такое плотное открытое подмножество $U\subset Y$, что для всех точек $y\in U$ в каждой точке $x\in\varphi^{-1}(y)$ имеет место равенство $\dim_x\varphi^{-1}(y)=\dim_x X-\dim_y Y$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной карты $U\ni\varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$ и заменяя X на $\varphi^{-1}(U)$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y=\mathbb{A}^m=\operatorname{Spec_m}\Bbbk[u_1,\dots,u_m]$, $\varphi(x)=0$. Заменяя X аффинной окрестностью точки x, мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i))\subset X$, и требуемое неравенство вытекает из сл. 11.9. В доказательстве второго утверждения мы также можем и будем считать оба многообразия аффинными, а морфизм φ — ограничением проекции $\pi: Y\times\mathbb{A}^m\twoheadrightarrow Y$ на замкнутое подмногообразие $X\subset Y\times\mathbb{A}^m$, как в упр. 10.17 на стр. 148. Мы собираемся применить к слоям этой проекции сл. 11.5. Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X}\subset Y\times\mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H\subset\mathbb{P}_m$ и точку $p\in\mathbb{P}_m\smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y\times\{p\}\subset Y\times\mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H удовлетворяет условиям предл. 11.1 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U\subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\big((Y\times\{p\})\cap\overline{X}\big)$, где

$\overline{\pi}: Y\times\mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y любым лежащим в U главным открытым подмножеством (которое, как и Y, тоже является аффинным алгебраическим многообразием), мы можем повторить рассуждения из сл. 11.5 одновременно во всех слоях проекции π. После конечного числа таких итераций мы получим конечный сюрьективный морфизм $\psi: X \twoheadrightarrow Y\times\mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюрьективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \twoheadrightarrow \{y\}\times\mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

Следствие 11.10 (теорема Шевалле о полунепрерывности)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi: X\to Y$ множества

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x\in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуты в X при всех $k\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k. Покажем, что она верна для Y. Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leqslant \dim(X)-\dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 11.1. Для $k > \dim(X)-\dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y\smallsetminus U$, где U взято из теор. 11.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k\subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Следствие 11.11
Для любого замкнутого морфизма $\varphi: X\to Y$ множество $Y_k \overset{\text{def}}{=} \{y\in Y \mid \dim\varphi^{-1}(y)\geqslant k\}$ замкнуто в Y при каждом $k\in\mathbb{Z}$.

Теорема 11.2 (размерностный критерий неприводимости)
Если регулярный морфизм $\varphi: X\twoheadrightarrow Y$ сюрьективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X.

Доказательство. Пусть $X = X_1\cup X_2$ приводимо. Положим

$$Y_1 \overset{\text{def}}{=} \{y\in Y \mid \varphi^{-1}(y)\subset X_1\}\,,\quad Y_2 \overset{\text{def}}{=} \{y\in Y \mid \varphi^{-1}(y)\subset X_2\}\,.$$

Поскольку каждый слой φ, будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1, либо в X_2, мы заключаем, что $Y = Y_1\cup Y_2$, причём оба подмножества Y_i отличны от Y, коль скоро оба подмножества X_i отличны от X. Так как Y_i совпадает с множеством таких точек в Y, над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i}X_i \to Y$ достигает своей максимальной размерности, из сл. 11.11 вытекает, что Y_i замкнуто. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y. □

11.6. Размерности проективных многообразий. По предл. 11.6 всякое d-мерное неприводимое многообразие $X\subset\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H\subset\mathbb{P}_n$ размерности $\dim H\geqslant n-d$. Покажем, что общее подпространство H размерности $\dim H < n-d$ не пересекается с X, и, тем самым, $\dim X$ можно охарактеризовать как наибольшее такое d, что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d. Для этого рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}(n-d, n+1) = \mathrm{Gr}(n-d, V)$, точками которого являются все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства $H\subset\mathbb{P}(V)$, и образуем многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(x,H)\in X\times\mathrm{Gr}(n-d,V) \mid x\in H\} \tag{11-10}$$

Упражнение 11.16. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \twoheadrightarrow X$ сюрьективна: её слой над каждой точкой x состоит из всех проективных подпространств размерности $n-d-1$, проходящих через x, и изоморфен грассманиану $\mathrm{Gr}(n-d-1,n) = \mathrm{Gr}(n-d-1, V/\Bbbk x)$ всех векторных $(n-d-1)$-мерных подпространств в фактор пространстве $V/\Bbbk x$. По теор. 11.2 многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d+(n-d-1)(d+1) = (n-d)(d+1)-1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \mathrm{Gr}(n-d,V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d,V)$ состоит из всех $(n-d-1)$-мерных подпространств, пересекающих X. Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim\Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \mathrm{Gr}(n-d,V) = (n-d)(d+1)$. Поэтому множество не пересекающих X подпространств размерности $(n-d-1)$ содержит в себе открытое по Зарисскому плотное подмножество грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d,V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n-d)$-мерных подпространств H' вместо $(n-d-1)$-мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие $\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,H') \in X \times \mathrm{Gr}(n-d+1,V) \mid x \in H\}$ размерности $\dim X + \dim \mathrm{Gr}(n-d,n) = d + d(n-d) = d(n-d+1)$. Так как $X \cap H' \neq \varnothing$ для всех H', проекция $\pi_2 : \Gamma' \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}(n-d+1,V)$ эпиморфна, и её общий слой[1] имеет по теор. 11.1 размерность $\dim\Gamma - \dim \mathrm{Gr}(n-d+1,n+1) = d(n-d+1)-(n-d+1)d = 0$. Это означает, что общая d-мерная плоскость H' пересекает X по конечному числу точек.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n-d-1)$-мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d,V)$ первого многообразия инцидентности (11-10) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 11.1 вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim\Gamma = \dim \mathrm{Gr}(n-d,V)-1$, т. е. пересекающие X подпространства размерности $(n-d-1)$ образуют неприводимую гиперповерхность[2] в грассманиане.

Упражнение 11.17. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n-d-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{P}_n$, обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \varnothing$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

Пример 11.10 (результант)

Фиксируем $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в n° 11.3 на стр. 157. Покажем, что результантное многообразие $\mathcal{R} = \{(S_0,S_1,\dots,S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \varnothing\}$ системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных, является неприводимой гиперповерхностью[3] в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$. Для этого рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1,\dots,S_n,\,p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}\,.$$

[1] Т. е. любой слой над точкой из некоего плотного открытого подмножества в грассманиане.

[2] Т. е. подмногообразие коразмерности 1.

[3] Т. е. существует такой неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений, что его обращение в нуль на наборе многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0,x_1,\dots,x_n) = 0$. Этот многочлен называется *результантом* рассматриваемой системы.

Упражнение 11.18. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f, проективные гиперповерхности степени d_i, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}_{N_i}$. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ сюрьективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 11.19. Предъявите в $\mathbb{P}_n$ набор из $n + 1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i, пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 11.20. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 11.11 (прямые на поверхностях)

Множество всех поверхностей данной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образует проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ размерности $N = \frac{1}{6}(d + 1)(d + 2)(d + 3) - 1$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\mathrm{Gr}(2, 4) = \mathrm{Gr}(2, V)$, изоморфный гладкой четырёхмерной квадрике в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Обозначим через $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2, 4) \mid \ell \subset S\}$ многообразие инцидентности между прямыми и поверхностями.

Упражнение 11.21. Убедитесь, что $\Gamma \subset \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2, 4)$ является проективным алгебраическим многообразием.

Покажем, что проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности. Прямая ℓ, заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, лежит на поверхности $V(f)$ если и только если $f = x_2 \cdot g + x_3 \cdot h$ лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^d V^* , \ (g, h) \mapsto x_2 g + x_3 h ,$$

который изоморфен фактору пространства $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$ размерности $\frac{1}{3}\,d(d + 1)(d + 2)$ по подпространству $\ker \psi = \{(g, h) = (x_3 q, -x_2 q) \mid q \in S^{d-2}V^*\}$ размерности $\frac{1}{6}(d - 1)d(d + 1)$. Поэтому содержащие ℓ поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6}\Big(2\,d(d + 1)(d + 2) - (d - 1)d(d + 1) \Big) - 1 = \frac{1}{6}\,d(d + 1)(d + 5) - 1 .$$

Мы заключаем, что Γ является неприводимым проективным многообразием размерности

$$\dim \Gamma = \frac{1}{6}\,d(d + 1)(d + 5) + 3 .$$

Проекция $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из предыдущего вытекает, что это замкнутое неприводимое многообразие.

Упражнение 11.22. Для каждого $d \geqslant 3$ предъявите поверхность степени d в $\mathbb{P}_3$, содержащую конечное число прямых.

Из упражнения вытекает, что у проекции π_1 имеется непустой 0-мерный слой. Поэтому её общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Так как разность

$$N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}\big((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)\big) - 4 = d - 3\,,$$

мы заключаем, что на каждой кубической поверхности в $\mathbb{P}_3$ есть прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых, а на общей поверхности степени не менее четырёх прямых вообще нет.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 11.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,\nu} = x_\nu / x_j = \left(x_\nu : x_i\right) / \left(x_j : x_i\right) = t_{i,\nu}/t_{i,j}$ (при $\nu = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi_{ji}^* : t_{j,\nu} \mapsto t_{i,\nu}/t_{i,j}$. Обратный к φ_{ji}^* гомоморфизм $\Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right)\right] \to \Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right)\right]$ действует по той же формуле $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$, $t_{i,\nu} \mapsto t_{j,\nu}/t_{j,i}$.

Упр. 11.2. В каждом таком W имеется единственный базис $w_1, \dots, w_k$, проектирующийся в стандартный базис $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ координатной k-плоскости. Матрица z, по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$, имеет $s_I(z) = E$. В GL_k-орбите каждой матрицы x im U_I также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 11.3. Элементы $k\times m$-матрицы $s_J^{-1}\left(\varphi_I(t)\right)\cdot\varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}\left(\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)\right)$. Поэтому отображение φ_{JI}, переводящее эту матрицу в её $k \times (m-k)$-подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_{\hat{I}}\left(s_I^{-1}\left(\varphi_J(t)\right) \cdot \varphi_J(t)\right)$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 11.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и зам. 10.2. на стр. 146.

Упр. 11.5. Отображение $\varkappa$ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ $\varkappa$ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 11.6. В обозначениях из прим. 11.1 на стр. 151 пересечение множества нулей однородного многочлена $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением $\overline{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0$.

Упр. 11.14. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 11.15. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 11.16. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n-d+1)\times(n+1)$-матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n-d$. Зануление всех миноров порядка $n-d+1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты[1] подпространства H и однородные координаты точки p.

Упр. 11.18. Γ задаётся однородными по всем f_i и p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0$.

Упр. 11.19. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 11.21. Вложим $\mathrm{Gr}(2,4)$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ по Плюккеру. Прямая (ab) лежит на поверхности $V(f)$ если и только если многочлен f тождественно зануляется на линейной оболочке векторов a и b, которая является образом свёртки $V^* \to V$ с бивектором $a \wedge b$. Убедитесь, что условие тождественного по $\xi \in V^*$ зануления функции $\xi \mapsto f(\xi \lrcorner (a \wedge b))$ записывается системой однородных полиномиальных уравнений на коэффициенты f и плюккеровы координаты бивектора $a \wedge b$.

[1] Напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве.