§10. Аффинная алгебраическая геометрия

10.1. Системы полиномиальных уравнений. Каждая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1,\dots,x_n)=0\,,\quad f_\nu\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\,,\tag{10-1}$$

может быть расширена до бесконечной системы уравнений, левые части которых пробегают идеал $J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, порождённый левыми частями f_ν системы (10-1). При таком расширении множество решений системы не изменится. Так как кольцо многочленов нётерово, идеал J порождается конечным набором многочленов $f_1,\dots,f_m$, которые можно выбрать среди левых частей исходной системы (10-1). Мы заключаем, что любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны — системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал. Множество всех решений системы полиномиальных уравнений вида (10-1), левые части которых пробегают идеал $J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, обозначается

$$V(J)\stackrel{\text{def}}{=}\{a\in\mathbb{A}^n\mid\forall\,f\in J\;f(a)=0\}$$

и называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Это множество вполне может оказаться пустым, что происходит, к примеру, когда идеал $J=(1)=\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ содержит уравнение $1=0$.

Для произвольной фигуры $\Phi\subset\mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi)\stackrel{\text{def}}{=}\{\,f\in\Bbbk[x_1,\dots,x_n]\mid f(p)=0\;\forall\,p\in\Phi\}$$

и называется *идеалом фигуры* Φ. Множество нулей $V(I(\Phi))$ такого идеала — это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ. Для любого идеала $J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ имеется тавтологическое включение $J\subset I(V(J))$. Вообще говоря, оно строгое: например, при $n=1$ для идеала $J=(x^2)$ многообразие $V(J)=\{0\}$, тогда как идеал $I(V(J))=(x)\supsetneq(x^2)=J$.

Теорема 10.1 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого идеала $J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ имеют место *слабая теорема о нулях*: $V(J)=\varnothing\iff 1\in J$ и *сильная теорема о нулях*:

$$f\in I(V(J))\iff f^m\in J\text{ для некоторого }m\in\mathbb{N}\,.$$

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ указать точку $p\in\mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Если имеется необратимый по модулю J многочлен $g\notin J$, идеал $J'=(J,g)$ не содержит 1 и строго больше, чем J. Так как увеличение идеала J только усложняет нашу задачу, мы можем заменить J на J'. В силу нётеровости кольца многочленов конечное число таких расширений приведёт к *максимальному* собственному идеалу J, фактор по которому $\Bbbk[x_1,\dots,x_n]/J$ является полем. Поскольку это поле конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый его элемент ϑ алгебраичен[2] над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta)=0$, где $\mu(t)\in\Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Так как поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, и $\vartheta\in\Bbbk$.

[1] Т. е. отличного от всего кольца многочленов.

[2] См. теор. 9.2 на стр. 132.

Тем самым, $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Пусть переменная x_i сравнима с $p_i \in \Bbbk$. Так как редукция по модулю J является гомоморфизмом, каждый многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(p_1, \dots, p_n) \pmod J$. Следовательно, все многочлены $f \in J$ зануляются в точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$.

Докажем второе утверждение. При $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, поэтому мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$, т. е. $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t, x_1, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Так как многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ тождедественно обращается в нуль на $V(J)$, многочлен $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$ тождественно равен единице на цилиндре $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому порождённый J и многочленом $g(t, x)$ идеал в $\Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$ и по слабой теореме о нулях содержит единицу, т. е. существуют такие $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ и $f_1, \dots, f_s \in J$, что

$$q_0(x, t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t, x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$, действующий на переменные по правилам $t \mapsto 1/f(x)$, $x_\nu \mapsto x_\nu$, получаем равенство

$$q_1\big(1/f(x), x\big) \cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x), x\big) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, \dots, x_n)$. Умножая обе части равенства на подходящую степень f^m получаем $f^m = \tilde{q}_1 f_1 + \dots + \tilde{q}_s f_s$ для некоторых $\tilde{q}_\nu \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. □

10.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\!f\!f_\Bbbk$, морфизмами в которой являются такие отображения $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, которые задаются в координатах формулой

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))\,,$$

где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ являются многочленами. Такие отображения называются *регулярными* или *полиномиальными*. В частности, функция $f : X \to \Bbbk$ регулярна, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую[1] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_\Bbbk}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{10-2}$$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ — идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X.

Лемма 10.1

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что равенство $f^n \in I$ для $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ возможно только если $f \in I$. По сильной теореме о нулях это означает, что $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

[1] Коммутативная алгебра называется *приведённой*, если в ней нет *нильпотентов* — таких ненулевых элементов a, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

10.2.1. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления* $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Он переводит единицу в единицу и эпиморфен, а значит, является гомоморфизмом факторицации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = \{ f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0 \}, \tag{10-3}$$

которое автоматически является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$, ибо фактор по нему — поле. Идеал (10-3) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Итак,

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk, \quad f \mapsto f \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_p) = f(p) \in \Bbbk.$$

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} : A \to A / \mathfrak{m}$, $a \mapsto a\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$, принимающий значения в поле $A / \mathfrak{m} \supset \Bbbk$. Если алгебра A конечно порождена, поле $A / \mathfrak{m}$ является конечно порождённой $\Bbbk$-алгеброй, а значит — конечным алгебраическим расширением[1] поля $\Bbbk$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, что позволяет интерпретировать элементы *любой* конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

Лемма 10.2

Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \mapsto \mathrm{ev}_p \mapsto \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда[3] можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Так как $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$. Поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$, точка $p \in X$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, включение $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ влечёт равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

[1] См. теор. 9.2 на стр. 132 и сл. 9.2 на стр. 132.

[2] Над алгебраически не замкнутым полем $\Bbbk$ сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ вкладывает множество тождественных на поле $\Bbbk$ гомоморфизмов $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры A, однако над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$: например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_i = 2$.

[3] Даже над не замкнутым полем.

Определение 10.1
Множество нильпотентных элементов[1] $\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ произвольного коммутативного кольца A называется *нильрадикалом* этого кольца.

Упражнение 10.1. Убедитесь, что нильрадикал является идеалом в A.

Следствие 10.1
Для любой конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$

$$\mathfrak{n}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A} \mathfrak{m}\,.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{n}(A)$ — это ядро гомоморфизма из алгебры A в алгебру функций на $\operatorname{Spec_m} A$, сопоставляющего элементу $a \in A$ функцию $a\colon\ \operatorname{Spec_m} A \to \Bbbk \simeq A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ фактор $A/\mathfrak{m}$ является полем, поэтому класс любого нильпотента в нём равен нулю. Тем самым, нильрадикал лежит в пересечении всех максимальных идеалов. Для доказательства обратного включения рассмотрим приведённую алгебру $A_{\text{red}} \overset{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$. Достаточно убедиться, что каждый элемент $a \in A_{\text{red}}$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec_m} A_{\text{red}} = \operatorname{Spec_m} A$, является нулевым в A_{red}. Но редуцированная алгебра A_{red} изоморфна координатной алгебре $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ некоторого аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и точки $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A_{\text{red}}$ находятся в биекции с точками многообразия X. Если многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ задаёт нулевую функцию на X, то он лежит в $I(X)$ и задаёт нулевой класс в $\Bbbk[X]$. □

Упражнение 10.2*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

10.2.2. Антиэквивалентность категорий. Со всяким отображением множеств $\varphi\colon X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия* $\varphi^*\colon \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$, $f \mapsto f \circ \varphi$, действующий из алгебры $\Bbbk^Y$ всех функций $Y \to \Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ всех функций $X \to \Bbbk$. Если аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$, а отображение $\varphi\colon X \to Y$ задаётся в координатах формулой $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, то поднятия $\varphi^*(y_i) = \varphi_i$. Регулярность отображения φ, по определению означающая, что $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, равносильна включению[2] $\varphi^*(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$, т. е. тому, что поднятие регулярной функции на Y является регулярной функцией на X.

Упражнение 10.3. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических (соотв. гладких или аналитических) многообразий $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) если и только если его гомоморфизм поднятия переводит непрерывные (соотв. гладкие или аналитические) функции $Y \to \mathbb{R}$ в непрерывные (соотв. гладкие или аналитические) функции $X \to \mathbb{R}$.

Теорема 10.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ контравариантный функтор

$$\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk} \to \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\text{opp}}\,, \quad X \mapsto \Bbbk[X] = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}}(X, \mathbb{A}^1)\,, \tag{10-4}$$

[1] Вместе с нулевым элементом.

[2] Обратите внимание, что включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, означающее, что правило $y_i \mapsto \varphi_i$ корректно задаёт гомоморфизм фактор алгебр $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y) \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n] = \Bbbk[X]$.

переводящий регулярный морфизм $\varphi: X \to Y$ аффинных многообразий в гомоморфизм поднятия $\varphi^*: \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$, является эквивалентностью категорий.

Доказательство. Согласно предл. 8.1 на стр. 116 достаточно убедиться, что функтор (10-4) по-существу сюрьективен и вполне строг. Первое было установлено в лем. 10.1 на стр. 137. Для доказательства второго рассмотрим функтор

$$\mathcal{Alg}_{\Bbbk} \to \mathcal{Set}, \quad A \mapsto \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(A, \Bbbk)\,, \tag{10-5}$$

переводящий гомоморфизм алгебр $\psi: A \to B$ в отображение поднятия

$$\psi^*: \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A\,,$$

сопоставляющее эпиморфизму $\mathrm{ev}: B \twoheadrightarrow \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$ композицию $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$, которая является эпиморфизмом с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Отображения множеств

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Aff}_{\Bbbk}}(X, Y) \underset{\psi^* \leftarrow\!\shortmid \psi}{\overset{\varphi \mapsto \varphi^*}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$$

являются взаимно обратными биекциями, т. е. $\varphi^{**} = \varphi$ и $\psi^{**} = \psi$ для любых аффинных многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ с координатными алгебрами $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. В самом деле, если регулярный морфизм $\varphi: X \to Y$ задаётся формулой $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, то $\varphi^*: \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие алгебры $\Bbbk[Y]$ по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \pmod{I(X)}$, причём включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, обеспечивающее корректное действие φ^* на фактор алгебру $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. Дважды двойственное отображение $\varphi^{**}: \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[Y]$ переводит гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}_p: \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f(x) \mapsto f(p)$, в точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$, в его композицию с φ^*. Эта композиция переводит образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p)$, т. е. является гомоморфизмом вычисления в точке $\varphi(p)$. Тем самым, $\varphi^{**} = \varphi$. Равенство $\psi^{**} = \psi$ для любого гомоморфизма алгебр $\psi: \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ проверяется аналогично. □

Упражнение 10.4. Сделайте эту проверку.

Замечание 10.1. Согласно лем. 10.2 функтор (10-5) почти квазиобратен к функтору (10-4): применяя его к координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$, мы получаем *множество* $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ точек многообразия X. Однако на этом множестве имеется много *разных* изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать такую структуру как вложение $\varphi: \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ с сюрьективным гомоморфизмом поднятия $\varphi^*: \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$, отождествляющее $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ с аффинным алгебраическим многообразием $V\left(\ker \varphi^*\right) \subset \mathbb{A}^n$. Фиксация таковой структуры равносильна выбору конкретного задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$.

Пример 10.1 (прямая и гипербола)
Так как гомоморфизм $\mathrm{ev}: \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = p \in \Bbbk$ на образующей t, точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам $p \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$. Соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ суть главные идеалы вида $(t - p)$. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ находятся в биекции с точками $p \in \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку значение $p = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. Алгебру

полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями при помощи изоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, $t \mapsto x$, $t^{-1} \mapsto y$. Алгебра $\Bbbk[x, y]/(xy - 1)$ является координатной алгеброй гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. Отображение поднятия $\varphi : V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$, отвечающее предыдущему гомоморфизму алгебр φ^*, проектирует гиперболу на координатную ось, биективно отождествляя точки гиперболы с отличными от нуля точками этой оси.

Пример 10.2 (копроизведение многообразий)
Так как алгебра $\Bbbk[X]\times\Bbbk[Y]$ конечно порождена и приведена, она является прямым произведением[1] алгебр $\Bbbk[X]$ и $\Bbbk[Y]$ в категории $\mathcal{Alg}_\Bbbk$. Поэтому максимальный спектр $\operatorname{Spec_m}\big(\Bbbk[X]\times\Bbbk[Y]\big) \simeq X \sqcup Y$ является прямым копроизведением[2] X и Y в категории $\mathcal{Aff}_\Bbbk \simeq \mathcal{Alg}_\Bbbk^{\text{opp}}$. Таким образом, дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий X и Y также является аффинным алгебраическим многообразием.

Пример 10.3 (произведение многообразий)
Тензорное произведение $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$. Умножение разложимых тензоров задаётся правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ и по дистрибутивности продолжается на их линейные комбинации.

Упражнение 10.5. Убедитесь, что такое продолжение корректно и задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей и что эта алгебра является копроизведением алгебр A и B в категории всех[3] коммутативных $\Bbbk$-алгебр с единицами.

Универсальное свойство тензорного произведения задаёт теоретико множественную биекцию $\operatorname{Spec_m}(A)\times\operatorname{Spec_m}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec_m}(A\otimes B)$, переводящую пару гомоморфизмов вычисления $\operatorname{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\operatorname{ev}_q : B \to \Bbbk$ в гомоморфизм $A\otimes B \to \Bbbk$, $a\otimes b \mapsto a(p)b(q)$. Если алгебры A и B конечно порождены, их тензорное произведение порождается конечным множеством всех попарных тензорных произведений образующих алгебр A и B. Покажем, что если алгебры A и B приведены, то их тензорное произведение $A \otimes B$ тоже приведено. По сл. 10.1 на стр. 139 достаточно убедиться, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec_m}(A \otimes B)$, равен нулю. Запишем h как $\sum f_\nu \otimes g_\nu$, где $g_\nu \in B$ линейно независимы над $\Bbbk$. Если $(\operatorname{ev}_p \otimes \operatorname{ev}_q)h = 0$ для всех $(p, q) \in \operatorname{Spec_m}(A \otimes B)$, то при каждом $p \in \operatorname{Spec_m} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec_m} B$, а значит, равна нулю, так как алгебра B приведена. Поэтому каждое $f_\nu \in A$ является нулевой функцией на $\operatorname{Spec_m} A$. Поскольку A приведена, все $f_\nu = 0$, а с ними и $h = 0$. Мы заключаем, что $\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ является прямым копроизведением в категории $\mathcal{Alg}_\Bbbk$. Поэтому аффинное многообразие $\operatorname{Spec_m}\big(\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]\big)$ является прямым произведением $X \times Y$ в категории $\mathcal{Aff}_\Bbbk$. Выше мы видели, что как множество оно совпадает с прямым произведением в $\mathcal{Set}$.

10.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \operatorname{Spec_m} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 10.6. Убедитесь, что а) $\varnothing = V(1)$ б) $X = V(0)$ в) $\bigcap_\nu V(I_\nu) = V\Big(\sum_\nu I_\nu\Big)$, где $\sum_\nu I_\nu$ означает идеал, образованный всевозможными конечными суммами $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$

[1] В смысле прим. 8.14 на стр. 118.
[2] В смысле прим. 8.15 на стр. 119.
[3] Не обязательно приведённых.

г) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$, где IJ означает идеал, представляющий собою $\Bbbk$-линейную оболочку всевозможных произведений[1] ab с $a \in I$, $b \in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на произведении $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые подмножества $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, при $X = Y = \mathbb{A}^1$ гипербола $V(xy - 1)$ замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, а отличные от всей плоскости произведения замкнутых подмножеств в $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и прямых, параллельных координатным осям.

Предложение 10.1 (база открытых множеств и компактность)
Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных* открытых множеств $\mathcal{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, где $f \in \Bbbk[X]$, и *компактно* в том смысле, что в каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $U = X \smallsetminus V(I)$. Так как алгебра $\Bbbk[X]$ нётерова, идеал $I = (f_1, \dots, f_m)$ конечно порождён. Поэтому $V(I) = \bigcap V(f_i)$ и $U = \bigcup \left(X \smallsetminus V(f_i)\right) = \bigcup_\nu \mathcal{D}(f_i)$. Это доказывает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что семейство главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ покрывает открытое множество U если и только если общие нули всех функций f_ν лежат вне U, т. е. $V(I) \subset X \smallsetminus U$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν. Поскольку $I = (f_1, \dots, f_m)$ для некоего конечного набора функций $f_1, \dots, f_m$, множество U покрывается множествами $\mathcal{D}(f_i)$, на которых отличны от нуля функции из этого набора. □

Предложение 10.2 (непрерывность регулярных морфизмов)
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}\left(V(I)\right)$ замкнутого подмножества $V(I) \subset Y$ состоит из всех таких точек $x \in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f \in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

10.3.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$, и неприводимые алгебраические многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 10.3
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, где каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие таких ненулевых необратимых функций $f_1 \in I(X_1)$, $f_2 \in I(X_2)$, что произведение

[1] Обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

$f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X. Последнее означает, что $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$ для ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$, то f_1 и f_2 необратимы в $\Bbbk[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X. При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 10.7. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 10.2
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ факториальна, радикал $\sqrt{(f)}$ любого главного идеала (f) тоже является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена f. Алгебра $\Bbbk[V(f)] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля если и только если f имеет ровно один неприводимый делитель с точностью до умножения на константы. □

Теорема 10.3
Каждое аффинное алгебраическое многообразие X является конечным объединением

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$$

таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$, и это разложение единственно с точностью до перестановки его элементов.

Доказательство. Сначала докажем существование разложения. Если X неприводимо, доказывать нечего. Если X приводимо, представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Каждую приводимую компоненту этого разложения снова разложим в объединение двух собственных замкнутых подмножеств, и так далее. Если на каком-то шаге получится разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, мы выкинем из этого объединения все неприводимые компоненты, которые содержатся в других неприводимых компонентах, и получим требуемое разложение. Если процесс не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \ldots$, идеалы которых $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$ образуют бесконечную возрастающую цепочку, противоречащую нётеровости алгебры $\Bbbk[X]$.

Единственность доказывается индукцией по k. При $k = 1$ многообразие X неприводимо и является единственной своей неприводимой компонентой. Пусть X раскладывается в объединение $k \geqslant 2$ неприводимых компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение в объединение неприводимых компонент единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup \ldots \cup X_k = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, что означает равенство $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из обоих разложений компоненты X_1 и Y_α и применим предположение индукции к объединению замыканий оставшихся компонент. □

Упражнение 10.8. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$, где замыкание берётся в X, и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 10.2
Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$ из теор. 10.3, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Следствие 10.3
Элемент $f \in \Bbbk[X]$ является ненулевым делителем нуля если и только если он обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте многообразия X, но не на всём X.

Пример 10.4 («большие» открытые множества)
Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае возникает разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

Упражнение 10.9. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

10.4. Рациональные функции. Элементы из $\Bbbk[X]$, не являющиеся делителями нуля, образуют *мультипликативную систему*[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных[2] $\Bbbk[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Если X неприводимо, то $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\Bbbk[X]$. Скажем, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$ и q не делит нуль, что $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* f в точке x.

Упражнение 10.10. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде дроби $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из сл. 10.3 и прим. 10.4 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 10.11. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом *рациональных функций, регулярных в* U.

Предложение 10.4
Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуля, то $\Bbbk\left[\mathcal{D}(h)\right] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k \geqslant 0}$.

---

[1]Напомню, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$, см. раздел 4.1 на стр. 52 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf.

[2]Напомню, что кольцом частных AS^{-1} со знаменателями из мультипликативной системы S коммутативного кольца A с единицей (или *локализацией* A относительно S) называется фактор декартова произведения $A \times S$, элементы которого принято обозначать a/s и называть *дробями*, по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$ со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$ (если Вы впервые с этим сталкиваетесь, то Вам следует убедиться, что $a_1/s_1 = a_2/s_2$ тогда и только тогда, когда $t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $t \in S$, и что обычные правила сложения и умножения дробей задают на AS^{-1} структуру коммутативного кольца), см. там же.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{10-6}$$

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Множество делителей нуля в (f^{-1}) представляет собою пересечение этого идеала с объединением идеалов $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в (f^{-1}) по определению имеются, каждое пересечение $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$ является собственным векторным подпространством в (f^{-1}), и весь идеал (f^{-1}) является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство (f^{-1}) оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем[1].

Упражнение 10.12. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что неделители нуля линейно порождают (f^{-1}) как векторное пространство над $\Bbbk$, и $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V((f^{-1}))$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ означает, что $V(h) \supset V((f^{-1}))$, т. е. функция h зануляется на $V((f^{-1}))$. По теореме Гильберта о нулях $h^d \in (f^{-1})$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p \in \Bbbk[X]$. □

10.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][h^{-1}] = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][t]/(1 - ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1 - ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$.

Замечание 10.2. Два *разных* толкования обозначения $\Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ — как координатной алгебры аффинного алгебраического многообразия $\mathcal{D}(h)$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, — *согласованы* друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два разных толкования обозначения $\Bbbk[X]$ — как координатной алгебры аффинного многообразия X и как алгебры рациональных функций, регулярных всюду на X, т. е. $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X) = \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) = X\}$. Это вытекает из предл. 10.4 при $h = 1$, что отвечает несобственному главному открытому множеству $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение 10.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, *не является* аффинным подмногообразием: каноническое вложение $U \hookrightarrow \operatorname{Spec_m} \Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \mathrm{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может быть не биективно.

Упражнение 10.13. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение 10.5
Пусть разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты имеет вид $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_k)$.

[1] А алгебраически замкнутое поле бесконечно.

Доказательство. Объединение $Z = \bigcup_{i\neq j}(X_i \cap X_j)$ попарных пересечений неприводимых компонент замкнуто в X. Выберем в его идеале $I(Z) \subset \Bbbk[X]$ какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I(Z)$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 10.14. Убедитесь, что $I(Z)$ линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно: $W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i$, где $f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i]$. Согласно прим. 10.2 $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \dots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 10.15. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей:

$$(K_1 \times \ldots \times K_k)S^{-1}_{K_1\times\ldots\times K_k} \simeq K_1S^{-1}_{K_1} \times \ldots \times K_kS^{-1}_{K_k}.$$

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

10.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \xrightarrow{\varphi_2^*} \Bbbk[X]. \tag{10-7}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже конечно порождена и приведена. Она является координатной алгеброй аффинного алгебраического многообразия $Z = \operatorname{Spec_m}\left(\operatorname{im}(\varphi^*)\right) \simeq V\left(\ker(\varphi^*)\right) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *всюду плотность* образа $\varphi_1(X)$ в многообразии Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y, вложенное в Y как замкнутое подмножество $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^*$. Иначе говоря, алгебраическое разложение (10-7) на геометрическом языке означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию регулярного морфизма $\varphi_1 : X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения $\varphi_2 : Z \hookrightarrow Y$ в качестве замкнутого подмногообразия.

10.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм поднятия $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, отвечающий замкнутому вложению $i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных[1] эпиморфизм i^*

[1] См. теорему 4.1 на стр. 53 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf.

однозначно продолжается до эпиморфизма $\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$, который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\Bbbk(Z)$.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, из сюрьективности гомоморфизма $\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$ вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X, т. е. записывается дробью вида p/q, знаменатель которой $q \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i] = \Bbbk[X]/I(X_i)$ представляется не делящим нуль в $\Bbbk[X]$ элементом $q \in \Bbbk[X]$.

Упражнение 10.16. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \Bbbk\big(\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x]\big)$ на прямой $Z = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x] = V(y)$ координатного креста $X = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]/(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]$.

10.5.2. Доминантные морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимого многообразия X называется *доминантным*, если гомоморфизм алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен. Как мы уже видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X. В этом случае каждое из ограничений $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ координатной алгебры многообразия Y в *поле* рациональных функций на X_i. По универсальному свойству кольца частных такое вложение однозначно продолжается до вложения $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \Bbbk(X_i)$ кольца рациональных функций на Y. Поэтому каждый доминантный морфизм $X \to Y$ задаёт вложение $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)$.

Упражнение 10.17. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ является композицией некоторого (не единственного) замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ и проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ вдоль $\mathbb{A}^m$.

10.5.3. Конечные морфизмы. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ цела над подалгеброй $\varphi^*(k[Y]) \subset \Bbbk[X]$. Это означает, что $\Bbbk[X]$ линейно порождается над $\varphi^*(k[Y])$ конечным набором функций $f_1, \dots, f_m$, т. е. любая функция $h \in \Bbbk[X]$ записывается как $h = \sum \varphi^*(g_i)\, f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$.

Лемма 10.3
Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, причём индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ тоже конечен. Если X неприводимо и $Z \neq X$, то $\varphi(Z) \neq Y$.

Доказательство. обозначим через $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр $f_Z^* : \Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]/I$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(\Bbbk[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ тоже конечно порождена как модуль над $\Bbbk[\overline{\varphi(Z)}] = \varphi|_Z^*(\Bbbk[Y]) = \varphi^*(\Bbbk[Y])/(I \cap \varphi^*(\Bbbk[Y]))$. Тем самым, морфизм $Z \to \overline{\varphi(Z)}$ конечен. Так как равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно проверить отдельно для каждой неприводимой компоненты многообразия Z, мы по уже доказанному можем считать, что $Z = X$ неприводимо, а $Y = \overline{Z}$, т. е. достаточно доказать, что каждый конечный доминантный морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимого аффинного многообразия X сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что если в расширении алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ большая алгебра не имеет делителей нуля и линейно порождается над меньшей конечным набором элементов $f_1, \dots, f_m$, то каждый максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[X]$. Если идеал $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[X]$, является собственным в $\Bbbk[X]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$. Таким образом, достаточно показать, что $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] \neq \Bbbk[X]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Предположим противное: пусть $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] = \Bbbk[X]$. Тогда каждая из образующих f_i, линейно порождающих $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk[Y]$, запишется в виде $f_i = \sum_\nu f_\nu \beta_{\nu i}$ с $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$. Мы получаем матричное равенство

$$(f_1, \dots, f_m)\,(E - B) = 0\,,$$

где $B = \left(\beta_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица. Следовательно[1]

$$(f_1, \dots, f_m) \cdot \det(E - B) = (f_1, \dots, f_m)\,(E - B)(E - B)^\vee = 0\,.$$

Так как в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E - B) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. идеал $\mathfrak{m} = \Bbbk[Y]$ не является собственным.

Чтобы доказать, что $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся на Z. Поскольку она цела над $\varphi^*(\Bbbk[Y])$

$$f^m + \varphi^*(g_1)\,f^{m-1} + \ldots + \varphi^*(g_{m-1})\,f + \varphi^*(g_m) = 0$$

для некоторых $g_1, \dots, g_m \in \Bbbk[Y]$. Рассмотрим такое соотношение с наименьшим возможным m. В нём $g_m \neq 0$, иначе его можно было бы сократить на f, ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля. Вычисляя левую часть в точках $z \in Z$, видим, что $\varphi^*(g_m)|_Z = g_m|_{\varphi(Z)} \equiv 0$. Поэтому $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$ является собственным замкнутым подмножеством. □

10.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле опр. 9.2. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, все аффинные пространства $\mathbb{A}^n$ нормальны[2].

Лемма 10.4

Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[3] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y.

Доказательство. Вложение $\varphi^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ позволяет рассматривать $\Bbbk[Y]$ как подалгебру в $\Bbbk[X]$. Открытость морфизма φ означает, что образ каждого главного открытого множества из X содержит вместе с каждой точкой какую-нибудь её главную открытую окрестность в Y, т. е. для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и каждой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, мы должны указать такую функцию $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1\,, \quad p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)\,.$$

Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to k[X]$ вычисляет полиномы от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. По сл. 9.5 минимальный многочлен μ_f элемента f над

[1] Ср. с доказательством лем. 9.1 на стр. 127.

[2] Включая точку $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\,\Bbbk$.

[3] Т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$.

полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Поэтому гомоморфизм ψ^* представляет собою факторизацию по главному идеалу $(\mu_f) = \ker\psi^*$. Мы заключаем, что морфизм ψ конечен и сюрьективно отображает X на гиперповерхность, заданную в $Y\times\mathbb{A}^1$ уравнением $\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\,t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$, а морфизм φ является композицией ψ и проекции $Y \times \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow Y$. Образ $\varphi(\mathcal{D}(f)) \subset Y$ состоит из всех таких точек $y \in Y$, что у многочлена $\mu_f(y;t) \in \Bbbk[t]$ есть ненулевой корень. Поскольку над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p);t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$, хоть один из коэффициентов, пусть это будет a_i, отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ тоже отличен от нуля, а значит, у многочлена $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ также есть ненулевой корень. Поэтому все эти точки q лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, т. е. $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup_{\nu\neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup_{\nu\neq i}(X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. $\square$

Упр. 10.1. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a+b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для всех c.

Упр. 10.5. Поскольку формула для произведения разложимых тензоров билинейна, она корректно распространяется по линейности на неразложимые тензоры. Универсальные отображения $A \xrightarrow{\alpha} A\otimes B \xleftarrow{\beta} B$ действуют по правилам $\alpha(a) = a\otimes 1$ и $\beta(b) = 1\otimes b$. Их универсальные свойства вытекают из универсальных свойств тензорного произведения: если заданы гомоморфизмы алгебр с единицами $\varphi : A \to C$ и $\psi : B \to C$, то отображение $A \times B \to C$, $(a,b) \mapsto \varphi(a)\cdot\psi(b)$, билинейно, а значит, однозначно пропускается через тензорное произведение $A \otimes B$.

Упр. 10.6. Первые три равенства и включения $V(I)\cup V(J) \subset V(I\cap J) \subset V(IJ) \subset V(I)\cup V(J)$ очевидны из определений.

Упр. 10.7. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1,\dots,x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1,\dots,x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 10.8. $Y = (Y\cap Z)\cup\overline{Y\smallsetminus Z}$, где по условию $Y\cap Z \neq Y$.

Упр. 10.9. Иначе $X = (X\smallsetminus U)\cup V(f-g)$.

Упр. 10.12. Если $V = \cup W_i$ и $\xi_i \in V^*$ — такие ненулевые линейные формы, что $W_i \subseteq \operatorname{Ann}\xi_i$, то ненулевой многочлен $f = \prod \xi_i$ тождественно зануляется на $\mathbb{A}(V)$.

Упр. 10.13. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 10.4.

Упр. 10.14. Каждое пересечение $I\cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup_{i\neq j}(X_i\cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i\cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 10.15. Элемент прямого произведения не делит нуль если и только если каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1\times\ldots\times K_k} = S^{-1}_{K_1}\times S^{-1}_{K_2}\times\cdots\times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 10.17. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1,\dots,x_m]/J$, что и утверждается.