§8. Категории и функторы

8.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\,.$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается

$$\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

и тоже является классом, а не множеством. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi$ $(= \varphi\psi)$, именуемое *композицией*[2] и ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный эндоморфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$, удовлетворяющий условиям[3] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$ для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для всех $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$.

Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 8.1 (категории, не являющиеся малыми)

Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория абелевых групп $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

Пример 8.2 (предпорядки, чумы и топологии)

Каждое множество M с предпорядком[5] $\leqslant$ может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

[1] Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

[2] Значок композиции «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

[3] Выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

[4] Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

[5] Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением.

а композиция стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ это стрелка $k \leqslant n$. Наличие композиции и тождественных морфизмов обеспечиваются транзитивностью и рефлексивностью отношения $\leqslant$.

Если предпорядок $\leqslant$ на M является частичным порядком[1], то при $m \neq n$ как минимум одно из множеств $\mathrm{Hom}(m,n)$, $\mathrm{Hom}(n,m)$ пусто. Важным примером такой категории-чума[2] является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 8.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру[3] A с единицей можно рассматривать как малую категорию с одним объектом $*$ и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(*,*) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ и коммутативным кольцом K с единицей можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в K. Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Тогда $K[\mathcal{C}] \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; x_i \in K\,,\ \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \right\}$. Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории $\mathcal{C}$

$$\varphi\psi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[4], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего K-модуля $K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует такой идемпотент $e_f = e_f^2$, что $e_f \circ f = f \circ e_f = f$: например, можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f.

8.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ называется *мономорфизмом*[5] (соотв. *эпиморфизмом*[6]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу. Например, в предупорядоченном множестве M,

[1] Т. е. кососимметричен в том смысле, что одновременное выполнение неравенств $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ влечёт равенство $x = y$.

[2] Т. е. частично упорядоченного множества.

[3] Более общим образом — любой ассоциативный моноид, т. е. полугруппу с единицей.

[4] Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

[5] А также *вложением* или *инъективным* морфизмом.

[6] А также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом.

рассматриваемом как категория[1], изоморфность элементов m и n означает, что $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, т. е. m и n принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

8.1.2. Подобъекты и фактор объекты. Класс инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[2], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 8.3 умеренно мощны.

Упражнение 8.1 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \succcurlyeq \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\psi = \xi\varphi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

Пример 8.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок[3] отображения. Категория Δ_{big} не является малой[4], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\, 1,\, \dots\,,\, n\}\,, \quad n \geqslant 0\,, \tag{8-1}$$

со стандартным порядком. Множество (8-1) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 8.2. Сколько всего стрелок в множестве $\operatorname{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \operatorname{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{8-2}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{8-3}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{8-4}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

8.1.3. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{\text{opp}} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}\,, \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\text{opp}} \circ \psi^{\text{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ и наоборот.

[1]См. прим. 8.2 на стр. 106.
[2]По-английски: *well powered*.
[3]Т. е. такие отображения $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
[4]По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 106.

8.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение классов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений множеств[2]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\,, \quad \varphi \mapsto F(\varphi)\,, \tag{8-5}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$. Если все отображения (8-5) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (8-5) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

Пример 8.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{8-6}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (8-3) и (8-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[7] $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

8.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком*[8] объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

---

[1] Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

[2] По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

[3] По-английски: *full*.

[4] По-английски: *faithful*.

[5] Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

[6] Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

[7] Т. е. в проекцию симплекса на симплекс на единицу меньшей размерности вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.

[8] Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категоря $\mathcal{C}$ малая.

Пример 8.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\varDelta_s \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\operatorname{Ob}\varDelta_s = \operatorname{Ob}\varDelta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[1] отображения. Категория $\varDelta_s$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 8.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\varDelta_s]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (8-3).

Предпучок множеств $X : \varDelta_s^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_s$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный n-мерный симплекс (8-6). Таким образом, каждое множество X_n представляет собою набор одинаковых n-мерных симплексов $\varDelta^n$. Пространство $|X|$ склеивается из них так. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ категории $\varDelta_s$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$. Будем воспринимать отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, как *правило склейки*: оно указывает каждому m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к x в качестве φ-той n-мерной грани.

Так, на рис. 8◇1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 8◇2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 8◇2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 8◇2 изображаются на рис. 8◇1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \varnothing$ для всех $i \geqslant 3$, а отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

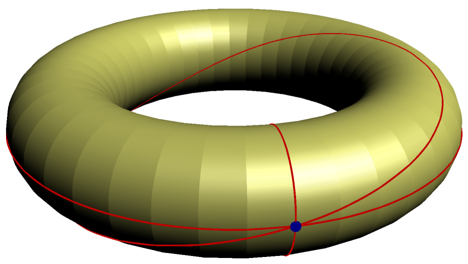

Рис. 8◇1. Триангуляция тора.

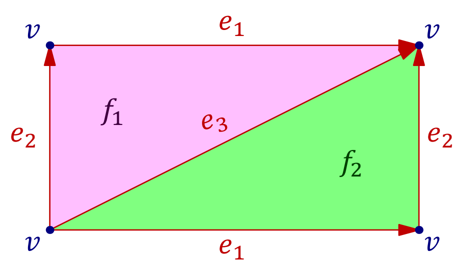

Рис. 8◇2. Симплексы триангуляции.

$$
\begin{aligned}
X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) : X_1 \to X_0\,, &\quad e_i \mapsto v \text{ для всех } i = 1, 2, 3\\
X(\partial_2^0) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_1\,,\ f_2 \mapsto e_2\,,\\
X(\partial_2^1) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_3\,,\ f_2 \mapsto e_3\,,\\
X(\partial_2^2) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_2\,,\ f_2 \mapsto e_1\,.
\end{aligned}
\tag{8-7}
$$

[1] Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

Упражнение 8.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[1] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 8.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества X также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство $|X|$, называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке $x \in X_n$ стандартный n-мерный симплекс Δ^n_x и обозначим через $\varphi^* \overset{\text{def}}{=} X(\varphi)$ отображение $X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет каждому неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ из категории Δ, а через $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m так, как предписывает φ. После чего для каждого m, каждого $x \in X_m$ и каждой стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ склеим каждую точку $s \in \Delta^n_{\varphi^*(x)}$ с точкой $\varphi_*(s) \in \Delta^m_x$. На языке формул результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство дизъюнктного объединения[2] $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $\left(\varphi^* x, s\right) \simeq \left(x, \varphi_* s\right)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \to [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \to [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n-мерный симплекс Δ^n_z, лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса $\Delta^k_y = \sigma_* \Delta^n_z$, полученного из Δ^n_z аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ-той k-мерной гранью m-мерного симплекса Δ^m_x. Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^*, отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \to [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n непусто.

Например, n-мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n-мерного симплекса по его границе[3] $S^n \simeq \Delta^n/\partial\Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n-мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \to [n]$ в класс стрелки $\zeta\varphi : [k] \to [n]$.

Упражнение 8.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с геометрической

[1] Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты.

[2] В котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

[3] Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

реализацией $|X| \simeq S^n$, и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 8.8 (предпучки и пучки на топологических пространствах)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник применительно к категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ открытых множеств $U \subset X$ топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. В таком контексте морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество $U \subset W$, и результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$. Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^{\sim}$, у которого $S^{\sim}(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S.

Упражнение 8.6. Опишите множество первообразных действительной функции $1/x$.

[1] Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

8.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов $h^X(Y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(X, Y)$, а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \operatorname{Hom}(X, Y_1) \to \operatorname{Hom}(X, Y_2)$, $\psi \mapsto \varphi\circ\psi$, левого умножения на эту стрелку, а также предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов $h_X(Y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(Y, X)$, а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \operatorname{Hom}(Y_2, X) \to \operatorname{Hom}(Y_1, X)$, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, правого умножения на эту стрелку.

Например, предпучок $h_{[n]} : \varDelta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_s$ задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \operatorname{Hom}([k], [n])$ это в точности множество всех k-мерных граней. На топологическом пространстве X предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \nsubseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 8.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\text{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \operatorname{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 8.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \varDelta_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \varDelta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob}\varDelta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\varDelta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения

$$\varphi^* : \operatorname{Hom}(Z_2, [1]) \to \operatorname{Hom}(Z_1, [1]), \quad \xi \mapsto \xi \circ \varphi.$$

Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z, т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, причём оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \operatorname{Ob}\nabla_{\text{big}}$, но одно из них может быть пусто, когда $Z \in \operatorname{Ob}\varDelta_{\text{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

[1] Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

8.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* функтора F в функтор G называется такое занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{8-8}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это гомоморфизм $K[\mathcal{C}]$-модулей, переводящий стрелку ψ с концом в $F(X)$ в стрелку $f_X \circ \psi$ с концом в $G(X)$, а все не заканчивающиеся в объектах вида $F(X)$ стрелки — в нуль.

Упражнение 8.7. Убедитесь, что $K[\mathcal{C}]$-линейность описанного отображения и впрямь означает, что для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

8.3.1. Категории функторов. Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{Set}$, т. е. $p\mathcal{Sh}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{Set})$.

Упражнение 8.8. Проверьте, что описанное в n° 8.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{Sh}(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{Set})$.

Пример 8.11 (категория предпучков)

Предпучки на категории $\mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X обычно называются просто предпучками на X. Они образуют категорию, обозначаемую $p\mathcal{Sh}(X)$. Морфизм предпучков $f : F \to G$ на X задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений $f_U : F(U) \to G(U)$, по одному отображению для каждого открытого $U \subset X$. Согласованность с ограничениями означает, что $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U \subset W$ и любого сечения $s \in F(W)$. Пучки и отделимые предпучки[1] образуют полные подкатегории $\mathcal{Sh}(X)$ и $sp\mathcal{Sh}(X)$ категории предпучков $p\mathcal{Sh}(X)$.

Пример 8.12 (категория симплициальных множеств)

Предпучки $X : \Delta \to \mathcal{Set}$ на симплициальной категории[2] Δ, образуют категорию, морфизмами $X \to Y$ в которой являются наборы отображений $f_n : X_n \to Y_n$, согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса $x \in X_m$ и неубывающего отображения $\varphi : [n] \to [m]$ из Δ в Y_n выполняется равенство $f_n(\varphi^* x) = \varphi^* f_m(x)$. На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение $f : |X| \to |Y|$, при котором образ каждого симплекса Δ^n_x в

[1]См. прим. 8.8 на стр. 112.
[2]См. прим. 8.7 на стр. 111.

пространстве[1] $|X|$ отображается на образ симплекса $\Delta^n_{f_n(x)}$ в пространстве $|Y|$ так, что все соотношения инцидентности[2] между симплексами при этом сохраняются.

8.3.2. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются функториальные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y\,, \tag{8-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (8-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 8.13 (выбор базиса)
Зафиксируем поле $\Bbbk$ и обозначим через $\mathcal{vec}$ категорию конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$ — её полную малую подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Выберем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{vec}$ какой-нибудь базис, т. е. зафиксируем изоморфизм[3]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{8-10}$$

и для координатных пространств положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{vec} \to \mathcal{crd}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{crd} \hookrightarrow \mathcal{vec}$. По построению мы имеем точное равенство[4] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{crd}}$. Противоположная композиция $GF : \mathcal{vec} \to \mathcal{vec}$ принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{vec}$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$. Однако изоморфизмы (8-10) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (8-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W).
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 8.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициальной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 8.4 на стр. 108).

[1] Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем n, размерности.
[2] Т. е. отношения вида «симплекс a является φ-той гранью (или ψ-тым вырождением) симплекса b».
[3] Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства $\Bbbk^n$.
[4] А не просто изоморфизм функторов.

Предложение 8.1

Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ указаны объект $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём если $Y = G(Z)$, то мы полагаем $X(Y) = Z$ и $f_Y = \mathrm{Id}_Y$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 8.10. Покажите, что функтор дуализации из прим. 8.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 8.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями[4] категорий.

8.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку $h_X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, называется *представимым*, и объект X в этом случае называют *представляющим* предпучок F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору $h^X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для некоторого объекта X, который в этом случае называется *копредставляющим* функтор F.

Упражнение 8.11. Убедитесь, что для произвольным образом зафиксированных конечномерных векторных пространств U и W функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$ копредставим тензорным произведением $U \otimes V$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\mathrm{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$, т. е. как множество «согласованных с триангуляциями» отображений стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X. Прямым обобщением этого наблюдения является

Лемма 8.1 (лемма Ионеды 1)

Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент

[1]Т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

[2]Функторы G, обладающие этим свойством, называются *по существу сюрьективными* (по-английски: *essentially surjective*).

[3]Поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна.

[4]Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не $\mathcal{C}$ с $\mathcal{D}$, а $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с $\mathcal{D}$.

$a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X) , \tag{8-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (8-11) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (8-11), любого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (8-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X) , \end{tikzcd} \tag{8-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу

$$a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A) .$$

Преобразование (8-11), отвечающее произвольно заданному элементу $a \in F(A)$, переводит стрелку $\varphi \in \operatorname{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$. Оно функториально, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 8.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 8.1

Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) .$$

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 8.2

Если объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $h^A \simeq F \simeq h^B$ (соотв. $h_A \simeq F \simeq h_B$), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм $h^B \xrightarrow{\sim} h^A$ (соотв. $h_A \xrightarrow{\sim} h_B$), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по A и B изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} B$. □

8.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 8.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию $\mathcal{C}$ естественные[1] операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 8.14 (произведение $A \times B$)

Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \ \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B\ , \tag{8-13}$$

изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (8-13) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B\ , \quad (\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,, \tag{8-14}$$

существует единственная стрелка $\varphi{\times}\psi : \ Y \to A{\times}B$, такая что $\beta_Y(\varphi{\times}\psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма[2]

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A \times B, A \times B) \arrow[r, "h_{A\times B}(\varphi\times\psi)"] \arrow[d, "\beta_{A\times B}"'] & \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \arrow[d, "\beta_Y"] \\
\operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B) \arrow[r, "h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)"] & \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,,
\end{tikzcd}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\mathrm{Id}_{A\times B}$ в $\varphi{\times}\psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\mathrm{Id}_{A\times B}$ как

$$\mathrm{Id}_{A\times B} \xmapsto{\beta_{A\times B}} (\pi_A, \pi_B) \xmapsto{h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)} \big(\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\big)\,,$$

[1] Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

[2] Ср. с использованной в доказательстве леммы Ионеды диаграммой из форм. (8-12) на стр. 117

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 8.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (8-14) существует единственная такая стрелка $Y \to C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и ψ соответственно. Убедитесь, что существует единственный такой изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм

$$\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2 ,$$

что $\alpha \circ \pi_{A_1} = \pi_{A_2} \circ (\alpha \times \beta)$ и $\beta \circ \pi_{B_1} = \pi_{B_2} \circ (\alpha \times \beta)$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 8.15 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$\mathcal{C} \to \mathcal{S}et , \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}(A, Y) \times \operatorname{Hom}(B, Y) .$$

Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм

$$\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y ,$$

что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 8.14. Убедитесь, что если универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B, и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \otimes \beta : A_1 \otimes B_1 \to A_2 \otimes B_2$, что $\iota_{A_2} \circ \alpha = (\alpha \otimes \beta) \circ \iota_{A_1}$ и $\iota_{B_2} \circ \beta = (\alpha \otimes \beta) \circ \iota_{B_1}$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A \otimes B = A \sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп[1] $A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом[2] копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[3].

[1] Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

[2] В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.

[3] Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \overset{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

Пример 8.16 (свободные модули)
Обозначим через R-$\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R. Для любого множества $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}et$ ковариантный функтор R-$\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)$, копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{e\in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 8.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,. \tag{8-15}$$

8.5. Сопряжённые функторы. Функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))\,. \tag{8-16}$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{8-17}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (8-16), написанном для $X = G(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (8-16), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Упражнение 8.16. Убедитесь в естественности этих преобразований.

Пример 8.17 (продолжение прим. 8.16 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (8-15) на стр. 120 означает, что функтор $F : \mathcal{S}et \to R$-$\mathcal{M}od$, $E \mapsto R \otimes E$, сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : R$-$\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование $s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$ вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование $t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$ — это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) \cdot x$, в которых лишь конечное множество коэффициентов $f(x)$ отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, и преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции f вещественное число $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) \cdot x$.

Пример 8.18 (самосопряжённость представимых функторов на категории $\mathcal{Ab}$)
Для любых трёх абелевых групп A, B, C имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(B,C)\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A,C)\big)\,, \tag{8-18}$$

переводящий семейство гомоморфизмов $\varphi_a : B \to C$, запараметризованное элементами $a \in A$ так, что $\varphi_{a'+a''} = \varphi_{a'} + \varphi_{a''}$ для всех $a', a'' \in A$, в запараметризованное элементами $b \in B$ семейство гомоморфизмов $\psi_b : A \to C$, $a \mapsto \varphi_a(b)$.

Упражнение 8.17. Проверьте, что каждое отображение ψ_b является гомоморфизмом абелевых групп и что $\psi_{b'+b''} = \psi_{b'} + \psi_{b''}$ для всех $b', b'' \in B$. Постройте обратное отображение из правой части (8-18) в левую.

Изоморфизм (8-18) можно переписать как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}}\big(h_C(B), A\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, h_C(A)\big)$. Это означает, что для любой абелевой группы C представимый функтор

$$h_C : \mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{Ab}\,, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X,C)\,,$$

самосопряжён. Естественное преобразование $s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X,C), C\big)$ сопоставляют элементу $x \in X$ гомоморфизм вычисления $s_X(x) = \mathrm{ev}_x : \mathrm{Hom}(X,C) \to C$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$. Естественное преобразование t_X представляет собою стрелку $h_C\big(h_C(X)\big) \to X$ в категории $\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}$, т. е. стрелку $X \to h_C\big(h_C(X)\big)$ в категории $\mathcal{Ab}$, и в таком виде совпадает с преобразованием s_X.

Предложение 8.2
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{8-19}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор (8-19) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование правого умножения $\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$ на стрелку φ, которое переводит стрелку $\psi : X_2 \to G(Y)$ в композицию $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает[1], что композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Следствие 8.3 (из доказательства предл. 8.2)
Если функтор F, сопряжённый слева к функтору G, существует, то он определяется по G однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов. □

Упражнение 8.18. Докажите двойственные утверждения: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого

[1] См. сл. 8.1 на стр. 117.

$Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ предпучок $h^F_Y : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ был представим, и в этом случае объект $G(Y)$ его представляет, а функтор G определяется по F однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.

Предложение 8.3

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] && \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{8-20}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (8-17) на стр. 120, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"'] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\operatorname{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\operatorname{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий второе естественное преобразование $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (8-17) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X)\,,$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (8-20) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi)\,,$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y\,.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\ F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[r, "F(s_X)"] & FGF(X) \arrow[u, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[u, "t_Y"'] \end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу того, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ совпадает с Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. $\square$

Пример 8.19 (эквивалентности категорий как сопряжённые функторы)
Пусть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ являются квазиобратными эквивалентностями[1], т. е. имеются естественные изоморфизмы $g : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ и $f : \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} FG$. Как и в доказательстве предл. 8.3, рассмотрим естественные по X, Y отображения

$$\begin{aligned} \varrho_{FG} &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \varphi \mapsto G(\varphi) \circ g_X = (g_X^* \circ G)\varphi \\ \varrho_{GF} &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(Y), X\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(Y, F(X)\big), \quad \psi \mapsto F(\psi) \circ f_Y = (f_Y^* \circ F)\psi\,. \end{aligned}$$

Поскольку оба отображения

$$\begin{aligned} g_X^* &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \xi \mapsto \xi \circ f_X\,, \\ G &: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big), \quad \xi \mapsto G(\xi)\,, \end{aligned}$$

являются биективными[2], их композиция ϱ_{FG} тоже биективна. Это означает, что функтор F сопряжён слева к функтору G. По аналогичной причине биективно и преобразование ϱ_{GF}, т. е. функтор F сопряжён к функтору G также и справа. Тем самым, квазиобратные эквивалентности категорий сопряжены друг другу с обеих сторон. Отметим, что по сл. 8.3 и упр. 8.18 на стр. 121 отсюда вытекает, что если один из двух сопряжённых друг другу функторов является эквивалентностью категорий, то и другой тоже таковою является.

Пример 8.20 (соответствие предпорядков, продолжение прим. 8.2 на стр. 106)
Функтор $F : N \to M$ между предупорядоченными множествами, рассматриваемыми как категории, это просто отображение, сохраняющее предпорядок: $n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow F(n_1) \leqslant F(n_2)$. Левая сопряжённость такого отображения сохраняющему порядок отображению $G : M \to N$ означает, что неравенства $F(n) \leqslant m$ и $n \leqslant G(m)$ равносильны друг другу. Наличие естественных преобразований $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_M$ и $s : \mathrm{Id}_N \to G \circ F$ означает неравенства $FG(m) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $n \in N$, $m \in M$, а тождественность сквозных преобразований $F \to FGF \to F$ и $G \to GFG \to G$ — неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$.

Упражнение 8.19. Убедитесь непосредственно, что условие $F(n) \leqslant m \iff n \leqslant G(m)$ на сохраняющие предпорядок отображения F, G эквивалентно системе неравенств $FG(m) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, причём если эти неравенства выполнены, то неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$ выполняются автоматически.

[1] См. n° 8.3.2 на стр. 115.

[2] Первое — в силу того, что является правым умножением на обратимую стрелку g_X, второе — потому что функтор F вполне строг.

Если оба предпорядка являются частичными порядками, последние два неравенства превращаются в равенства $F(n) = FGF(n)$ и $G(m) = GFG(m)$. Примером такой ситуации является *соответствие Галуа*. Пусть группа H действует слева на множестве X, а $\mathcal{S}(H)$ и $\mathcal{S}(X)$ обозначают частично упорядоченные по включению множества подгрупп в H и подмножеств в X соответственно. Функтор

$$F : \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}}, \quad S \mapsto X^S = \{x \in X \mid \forall h \in S \; hx = x\},$$

сопоставляет подгруппе $S \subset G$ множество её неподвижных точек. Функтор

$$G : \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}(H), \quad T \mapsto Z_T = \{h \in H \mid \forall x \in T \; hx = x\},$$

сопоставляет подмножеству $T \subset X$ его *централизатор*[1].

Упражнение 8.20. Убедитесь, что эти функторы сопряжены, т. е. $X^S \supset T \iff S \subset Z(T)$ для любых подмножества $T \subset X$ и подгруппы $S \subset H$, и что при этом выполняются равенства

$$Z_{X^{Z_T}} = Z_T \quad \text{и} \quad X^{Z_{X^S}} = X^S.$$

8.6. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо. Тензорным произведением $M \otimes_R N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[2] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями $(mx) \otimes n - m \otimes (xn)$, где $m \in M$, $x \in R$ и $n \in N$. Это абелева группа, на которой кольцо R, вообще говоря, больше уже не действует, но в которой выполняются соотношения

$$(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn).$$

Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b, \quad X \mapsto X \otimes_R N, \tag{8-21}$$

из категории правых R-модулей в абелевы группы. Он переводит стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку

$$\varphi \otimes \mathrm{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n.$$

Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S, и правое действие S коммутирует с левым действием[3] R, функтор (8-21) действует из $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$, поскольку кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. Вместе с этим, представимый функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N, Y)$, принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$. Правое действие $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$, так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$.

Предложение 8.4
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \otimes_R N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)\big). \tag{8-22}$$

[1] Т. е. поточечный стабилизатор. Обратите внимание, что оба функтора оборачивают включения.
[2] Или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей.
[3] Такие модули N называются *R-S бимодулями*.

Доказательство. Отображение из левой части (8-22) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа: $\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes_R ns) = \varphi(x \otimes_R n)s = \varphi_x(n)s$, а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)$, R-линейно справа: $\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes_R n) = \varphi(x \otimes_R rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n$. Обратное отображение из правой части (8-22) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes_R n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 8.21. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y) \otimes_R N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X \otimes_R N\big) .$$

Пример 8.21 (индуцирование и коиндуцирование)

Если кольцо A содержится в кольце B и они имеют общую единицу, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A . \tag{8-23}$$

Рассмотрим B как A-B бимодуль и положим в предл. 8.4 $S = N = B$, $R = A$. Абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B,Y)$ канонически отождествляется с Y гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и как правый A-модуль изоморфна $\mathrm{res}\, Y$.

Упражнение 8.22. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (8-22) из предл. 8.4 превращается в функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\, Y) .$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\, X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Таким образом, функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 8.23. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{res}\,\mathrm{ind}\, Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{ind}\,\mathrm{res}\, X .$$

Теперь рассмотрим B как B-A бимодуль и положим в предл. 8.4 $S = A$, $N = R = B$. Канонический гомоморфизм $X \otimes_B B \xrightarrow{\sim} X$, $x \otimes_B b \mapsto xb$, является изоморфизмом абелевых групп и отождествляет правый A-модуль $X \otimes_B B$ с $\mathrm{res}\, X$.

Упражнение 8.24. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (8-22) из предл. 8.4 превращается в функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\, X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B,Y)\big) .$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\, Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B,Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Таким образом, функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 8.25. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{res}\,\mathrm{coind}\, Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{coind}\,\mathrm{res}\, X .$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами группы G и её подгруппы $H \subset G$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$, мы получаем обсуждавшиеся нами в n° 6.3 на стр. 87 функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы $H \subset G$.

Упражнение 8.26*. Покажите, что функторы ind, coind : $\mathcal{M}od\text{-}H \to \mathcal{M}od\text{-}G$ естественно изоморфны, если индекс $[G : H]$ конечен.

Пример 8.22 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \varDelta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varDelta^n, Y) = h_Y(\varDelta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \varDelta^m \to \varDelta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\varDelta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\varDelta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 8.7 на стр. 111, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \varDelta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)), \tag{8-24}$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (8-22) на стр. 124. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов всех размерностей. На пространстве D имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями φ_*. Оно задаёт правое действие стрелок из $\varDelta$ на множестве $S(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ сингулярных симплексов топологического пространства Y. С другой стороны, каждое симплициальное множество $X : \varDelta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ по определению снабжено правым действием стрелок категории $\varDelta$ на множества $X_n = X([n])$, и геометрическая реализация $|X|$, представляющая собою фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом «тензорного произведения $X \otimes_\varDelta D$». Таким образом, изоморфизм (8-24) имеет вид

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \otimes_\varDelta D, Y\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big), \tag{8-25}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (8-22) со стр. 124.

Упражнение 8.27. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (8-25) и опишите естественные преобразования[1]

$$t_Y : |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to S\big(|X|\big).$$

[1] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\varDelta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(\varDelta^n, |X|\big)$ соответственно.

Упр. 8.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 8.6. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \smallsetminus 0$.

Упр. 8.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование $f_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X)$, посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{9-5}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 8.22. Отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и $Y \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y)$, переводящее элемент $y \in Y$ в умножение $\varphi : b \mapsto yb$, взаимно обратны и A-линейны справа.

Упр. 8.24. Отображения $x \otimes_B b \mapsto xb$ и $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$ являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами между $X \otimes_B B$ и X.

Упр. 8.26. См. упр. 6.14 на стр. 92 и предшествующее ему обсуждение.

Упр. 8.27. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ преобразование $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ из $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию $f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \to |X| \to Y$, где $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[2] $\iota : \bigsqcup_{n \geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to |X|$ на правильный симплекс $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ набору отображений $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \to Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \to Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n\,,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \to S\big(|X|\big)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ переводит

[1] И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

[2] Непрерывного в силу определения фактор топологии.

точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ и предпучку $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}un(\Delta^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$).