§7. Представления симметрических групп

7.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если $m = |\lambda|$, т. е. число букв совпадает с числом клеток диаграммы, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если стоящие в клетках диаграммы буквы нестрого возрастают слева направо в каждой строке и строго возрастают сверху вниз в каждом столбце. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ обозначается через $d_\lambda(m)$, а число всех стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m) \neq 0$ только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 4.1 на стр. 53

$$\sum_\lambda d_\lambda d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{7-1}$$

где суммирование в обоих случаях идёт по всем диаграммам Юнга веса $|\lambda| \overset{\text{def}}{=} \sum \lambda_i = n$. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и веса n связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что S_n транзитивно действует на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для всех $g \in S_n$.

Мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$ и говорим, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если[2]

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_k \text{ при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

Мы пишем $\lambda > \mu$, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ лексикографически больше, чем $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Отметим, что диаграмма μ не может доминировать никакую диаграмму $\lambda > \mu$, и что в отличие от доминирования лексикографический порядок является линейным.

Лемма 7.1 (ключевая комбинаторная лемма)
Пусть стандартное заполнение T формы λ и стандартное заполнение U формы μ имеют одинаковый вес $|\lambda| = |\mu|$, и диаграмма μ не является строго доминирующей диаграмму λ. Тогда имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U. Из того, что все элементы

[1] При этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться.
[2] См. обсуждение перед упр. 4.3 на стр. 56 и само это упражнение.

второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1 U} = C_U$, что в заполнении $q_2 q_1 U$ каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность перестановок $q_1, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ и каждая перестановка $q_i \in C_{q_{i-1} \dots q_1 U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все те элементы из i-той строки T, которые в заполнении $q_{i-1} \dots q_1 U$ лежат в столбцах меньшей, чем i высоты, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \dots q_1 U$. В частности, при каждом i выполняется неравенство $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \dots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. Но тогда каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i \dots q_1 U$. Поэтому $q_k \dots q_1 U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 7.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Для любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ элементы из одной строки заполнения T лежат в разных столбцах заполнения qT, и p переставляет эти элементы между собою, оставляя их лежать в разных столбцах заполнения pqT. Наоборот, если никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце заполнения $U = gT$, то по лем. 7.1 найдутся такие $p \in R_T$ и $q' \in C_U$, что $pT = q'U = q'gT$. Поэтому $p = q'g$. Записывая перестановку $q' \in C_{gT} = gC_T g^{-1}$ в виде gqg^{-1}, где $q \in C_T$, получаем $g = pq^{-1}$, как и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

7.2. Симметризаторы Юнга. Лежащие в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ элементы

$$r_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\,, \tag{7-2}$$

$$s_T = r_T c_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) pq \tag{7-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = g r_T g^{-1}\,, \quad c_{gT} = g c_T g^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = g s_T g^{-1} \tag{7-4}$$

$$\forall p \in R_T \; p r_T = r_T p = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q) q c_T = \operatorname{sgn}(q) c_T q = c_T \tag{7-5}$$

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q) p s_T q = s_T\,. \tag{7-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (7-6).

Лемма 7.2
Векторное подпространство $E_T = \{ f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T \; \forall q \in C_T \;\; \operatorname{sgn}(q) p f q = f \}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

[1] Последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{g\in S_n} x_g g \in E_T$. Покажем, что $f = x_e s_T$. Условие $\mathrm{sgn}(q)\, pfq = f$ означает, что $x_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)x_g$ для всех $g \in S_n$, $p \in R_T$ и $q \in C_T$. Полагая $g = e$, заключаем, что $x_{pq} = \mathrm{sgn}(q)x_e$ и $f = x_e s_T + \sum_{g\notin R_T C_T} x_g g$. Остаётся убедиться, что в последней сумме все $x_g = 0$. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 7.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения gT. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_{gT} = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 7.3

Имеют место равенства $s_T\mathbb{C}[S_n]\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$ и $s_T^2 = n_\lambda s_T$, где число $n_\lambda = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n]\, s_T\right)$ рационально, положительно и зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (7-5) – (7-6) вытекает, что при любом $f \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T f s_T$ обладает свойством (7-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C}\, s_T$ из лем. 7.2. В частности, $s_T^2 = n_T s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : f \mapsto f s_T$. С одной стороны, из формулы (7-3) вытекает[1], что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения gs_T равен единице, откуда $\mathrm{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Так как последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n]\, s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\mathrm{tr}(s_T) = n_T \dim(\mathbb{C}[S_n]\, s_T)$. Следовательно, число $n_T = n!/\dim(\mathbb{C}[S_n]\, s_T)$ рационально и положительно. Наконец, из равенства $s_{gT} = gs_T g^{-1}$ вытекает, что $s_{gT}^2 = gs_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$. Поэтому число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 7.4

Если форма стандартного заполнения T лексикографически больше, чем форма стандартного заполнения U, то $r_T\mathbb{C}[S_n]\, c_U = c_U\mathbb{C}[S_n]\, r_T = s_T\mathbb{C}[S_n]\, s_U = 0$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $r_T g c_U = c_U g r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 7.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T c_U = (r_T\tau)c_U = r_T(\tau c_U) = -r_T c_U$ и $c_U r_T = -(c_U\tau)r_T = -c_U(\tau r_T) = -c_U r_T$, откуда $r_T c_U = c_U r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T g c_U = r_T g c_U g^{-1} g = \left(r_T c_{gU}\right) g = 0$ и $c_U g r_T = c_U g r_T g^{-1} g = \left(c_U r_{gT}\right) g = 0$. □

Теорема 7.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

[1]Так как $R_T \cap C_T = \{e\}$, все слагаемые в сумме (7-3) являются *различными* элементами группы S_n, взятыми со знаком ± 1, причём элемент $e = ee$ берётся с плюсом.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi_W(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = x\pi_W(1) = xw$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T W \subset s_T V_T = s_T \mathbb{C}[S_n]\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T W = 0$, либо $s_T W = \mathbb{C}\, s_T$. В первом случае $WW \subset V_T W = \mathbb{C}[S_n]\, s_T W = 0$, откуда $w^2 = 0$, а значит, и $W = 0$, поскольку правое умножение на w тождественно действует на $W = \mathbb{C}[S_n]\, w$. Во втором случае $s_T \in s_T W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 7.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно, согласно лем. 7.3, действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

7.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения $T = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{smallmatrix}$ цикл $|132\rangle = |12\rangle \circ |13\rangle$ входит в $R_T C_T$ и не входит в $C_T R_T$, а цикл $|123\rangle = |13\rangle \circ |12\rangle$, наоборот, входит в $C_T R_T$ и не входит в $R_T C_T$. Таким образом, перестановка сомножителей в формуле (7-3) приводит к вообще говоря отличному от $s_T = r_T c_T$ симметризатору

$$s'_T = c_T r_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) qp\,, \tag{7-7}$$

который является образом симметризатора s_T при *антиподальном антиавтоморфизме*

$$\alpha : \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n]\,, \quad \sum_{g \in G} x_g g \mapsto \sum_{g \in G} x_g g^{-1}\,, \tag{7-8}$$

оборачивающем порядок сомножителей в произведениях переводящем строчный и столбцовый симметризаторы r_T и c_T в себя.

Упражнение 7.2. Сформулируйте и докажите для s'_T аналоги равенств (7-6), лем. 7.4, лем. 7.3 и теор. 7.1.

Предложение 7.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Правые умножения на c_T и r_T задают гомоморфизмы левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, c_T r_T \underset{x r_T \leftarrow\!\shortmid x}{\overset{x \mapsto x c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n]\, r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x r_T c_T = x s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 7.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum_{p\in R_T}\sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(p)qp = \sum_{p\in R_T}\sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(pq)qp = \sigma\left(s'_T\right) ,$$

где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис из групповых элементов по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g)g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению S_n в пространстве $V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, s'_T$, заданному правилом $g : xs'_T \mapsto \operatorname{sgn}(g)gxs'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает это пространство на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n]\, s_{T^t}$, превращая последнее действие в левое умножение на $g : \sigma(x)s_{T^t} \mapsto g\sigma(x)s_{T^t}$. □

7.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы на заполнениях $g : T \mapsto gT$ корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах, так как $gR_TT = gR_Tg^{-1}gT = R_{gT}gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление группы S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n/R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ индуцирован тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_T \subset S_n$. Характер модуля M_λ обозначается через ψ_λ.

Упражнение 7.3. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

Его значение следующим образом выражается через количества m_j строк длины j в диаграмме μ.

Предложение 7.2

Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ на классе сопряжённости $C_\mu \in \operatorname{Cl}(S_n)$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x_1, \dots , x_n)$ по стандартному мономиальному базису[2] $m_\lambda(x_1, \dots , x_n)$.

Доказательство. Как обычно, обозначим через m_i количество строк длины i в диаграмме μ. Тогда $p_\mu = p_{\mu_1}\dots p_{\mu_n} = p_1(x)^{m_1}\dots p_n(x)^{m_n}$, где

$$p_i(x)^{m_i} = (x_1^i + \dots + x_n^i)^{m_i} = \sum \frac{m_i!}{\varrho_{i1}!\dots\varrho_{in}!} x_1^{i\varrho_{i1}}\dots x_n^{i\varrho_{in}}$$

и суммирование идёт по всевозможным наборам неотрицательных целых чисел $\varrho_{i1}, \dots , \varrho_{in}$ с суммой $\sum_j \varrho_{ij} = m_i$. Таким образом, коэффициент при $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ у многочлена $p_\mu = p_1^{m_1}\dots p_n^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} m_1!\dots m_n!/\prod_{ij}\varrho_{ij}! , \tag{7-9}$$

[1] См. формулу (3-14) на стр. 40.

[2] См. формулу (3-3) на стр. 36.

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что

$$\sum_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum_i i\varrho_{ij} = \lambda_j\,. \tag{7-10}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 6.5 на стр. 91 формуле (6-23) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T]\,|C_\mu \cap R_T|/|C_\mu|\,, \tag{7-11}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n!/\prod_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ распадается в объединение непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, каждый из которых состоит из перестановок циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами j-той строки из T. Эти классы также нумеруются удовлетворяющими условиям (7-10) наборами неотрицательных целых чисел $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ с $1 \leqslant i, j \leqslant n$. При сопряжении подгруппой R_T стабилизатор перестановки $g \in D_\varrho$ является прямым произведением $\prod \varrho_{ij}!$ перестановок циклов одинаковой длины между собою как единого целого и $\prod i^{m_i}$ циклических сдвигов внутри этих циклов. Тем самым, $|C_\mu \cap R_T| = \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j!/\prod_{ij} i^{m_i}\varrho_{ij}!$. Подставляя всё это в (7-11) и сокращая общие множители числителя и знаменателя, получаем (7-9). □

7.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}\,. \tag{7-12}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (7-12) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ± 1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля. Линейная оболочка векторов (7-12), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, так как $gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}$ для всех $g \in S_n$. Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 7.5
Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_T M_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C}v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{7-13}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 7.1 на стр. 93 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = c_Tq\{T\} = \operatorname{sgn}(q)c_T\{T\} = \pm v_T$. □

Теорема 7.2
Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\,s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Так как по лем. 7.5 $c_T S_\lambda \subset c_T M_\lambda = \mathbb{C} v_T$, ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = g v_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 7.5 оператор c_T аннулирует подмодуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, ибо $c_T v_T = c_T c_T\{T\} = |C_T| c_T\{T\} = |C_T| v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n]\, s_U$, где U — любое заполнение формы μ. Поскольку по лем. 7.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими, чем λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 7.3

В разложении представления M_λ в сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в M_λ с кратностью 1.

Доказательство. Так как оператор c_T переводит M_λ в подмодуль Шпехта и нетривиально действует на последнем, в разложении модуля M_λ в прямую сумму простых есть ровно одно слагаемое, изоморфное S_λ. Если существует S_n-линейное вложение $S_\mu \hookrightarrow M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, нетривиально действует на M_λ. Но в силу лем. 7.5 $c_U M_\lambda = 0$, когда μ не доминирует λ. □

7.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Скажем, что $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 7.4. Проверьте, что это отношение задаёт линейный порядок на стандартных заполнениях формы λ.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\ \hline 3&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \dots$$

$$\dots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\ \hline 2&3\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 1&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 3&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 3&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 2&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Главная особенность введённого порядка состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ выполняются строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$. Действительно, самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T

[1] См. n° 7.1 на стр. 93.

является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 7.5. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых стандартных таблиц $U \succ T$.

Теорема 7.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum_{U \prec T} \varepsilon_U \{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum_{U \prec T} x_U v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum_{U \prec T} y_U \{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\} \neq \{U\}$ ни для какого $U \prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (7-1) на стр. 93 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 5.7 на стр. 76 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

7.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную группу абелеву кольца представлений[2] группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество попарно неизоморфных представителей всех неприводимых представлений S_n. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров группы S_n в пространстве всех функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим $\mathfrak{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. Мы собираемся снабдить прямую сумму $\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{R}_n$ структурой *градуированного* коммутативного кольца с единицей[3]. Подчеркнём, что *умножение Литтлвуда – Ричардсона* на кольце $\mathfrak{R}$, которое мы для этого введём, *отличается* от обсуждавшегося в n° 6.2.2 на стр. 87 умножения $[U], [W] \mapsto [U \otimes W]$, имеющегося на каждом из $\mathfrak{R}_n$ в отдельности.

7.5.1. Умножение Литтлвуда – Ричардсона в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара линейных представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi \times \psi : S_k \times S_m \to \mathrm{GL}(U \otimes W), \quad (g, h) : u \otimes w \mapsto gu \otimes hw . \tag{7-14}$$

Вложим $S_k \times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1, \dots, k + m\} = \{1, \dots, k\} \sqcup \{k + 1, \dots, k + m\}, \tag{7-15}$$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (7-14), и положим $[\varphi]\,[\psi] \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)]$. Если вместо разбиения (7-15) воспользоваться другим разбиением $\{1, \dots, k+m\} = I \sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая подгруппа $S_k \times S_m \subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

Упражнение 7.6. Убедитесь в этом.

[1] Для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо.

[2] См. n° 6.2.2 на стр. 87.

[3] Т. е. ввести на $\mathfrak{R}$ такое умножение, что $\mathfrak{R}_k \mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$.

Таким образом, класс $[\varphi]\,[\psi]$ не зависит от выбора разбиения (7-15), используемого для его построения. В частности, умножение (7-14) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi]\,[\eta])[\zeta]$ и $[\xi]\,([\eta]\,[\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k \times S_\ell \times S_m \subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу $(g_1, g_2, g_3) \mapsto \xi(g_1) \otimes \eta(g_2) \otimes \zeta(g_3)$.

Упражнение 7.7. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 7.6

Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов $[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \dots [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} \dots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i означает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 7.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_n} \subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. При этом $[\mathbb{1}_{\lambda_i}] = [M_{(\lambda_i)}]$ — это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

7.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U],[W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R} = \oplus \mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов $[U] = \sum k_\lambda [V_\lambda]$ и $[W] = \sum m_\lambda [V_\lambda]$, лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U],[W]) = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \mathrm{Hom}_{S_n}(U,W) = (\chi_U, \chi_W)_n\,, \tag{7-16}$$

где $(\chi_U, \chi_W)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций[1] $\mathbb{C}^{S_n}$. Как обычно, для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod_i m_i!\, i^{m_i}\,, \tag{7-17}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 6.2. на стр. 86 скалярное произведение характеров в правой части (7-16) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_U(g)\chi_W(g) = \frac{1}{n!} \sum_\mu |C_\mu| \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,.$$

[1] См. зам. 6.2. на стр. 86.

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U], [W] \in \mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W]) = \sum_{\mu} z_\mu^{-1}\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,. \tag{7-18}$$

7.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 4.6 на стр. 60 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle p_\lambda , p_\lambda \rangle = z_\lambda$. Согласно предл. 7.2 на стр. 97 значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера ψ_λ таблоидного представления M_λ совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции $p_\mu = \sum_\lambda \psi_\lambda(C_\mu) m_\lambda$ по мономиальному базису m_λ, а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_λ с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_\lambda(C_\mu) = \langle p_\mu , h_\lambda \rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису $z_\mu^{-1} p_\mu$:

$$h_\lambda = \sum_\mu z_\mu^{-1}\langle p_\mu , h_\lambda \rangle p_\mu = \sum_\mu z_\mu^{-1}\chi_{M_\lambda}(C_\mu)p_\mu\,. \tag{7-19}$$

Сравнение равенств (7-19) и (7-18) подсказывает следующий результат:

Теорема 7.4

Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch} : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S_\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_λ и s_{λ^t}, а также h_λ и e_λ. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[2]

$$\mathrm{ch}([U]) \overset{\text{def}}{=} \sum_\mu z_\mu^{-1}\chi_U(C_\mu)p_\mu\,. \tag{7-20}$$

Доказательство. Отображение (7-20) очевидно линейно по $[U]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}([U]+[W]) = \mathrm{ch}([U\oplus W]) &= \sum_\mu z_\mu^{-1}\chi_{U\oplus W}(C_\mu)p_\mu = \\ &= \sum_\mu z_\mu^{-1}\left(\chi_U(C_\mu)+\chi_W(C_\mu)\right)p_\mu = \mathrm{ch}([U]) + \mathrm{ch}([W])\,.\end{aligned}$$

Согласно лем. 7.6 на стр. 101 и сл. 3.4 на стр. 40 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[3] h_k, где в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$. В силу соотношения (7-19) отображение ch переводит каждый базисный моном $[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}]\dots[\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1}\dots[\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i равно количеству строк длины i

[1] См. сл. 4.2 на стр. 60.

[2] Не смотря на то, что она содержит знаменатели.

[3] Напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k, см. n° 3.3 на стр. 39.

в диаграмме λ, в базисный моном $h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} \dots h_n^{\ell_n}$ с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\mathrm{ch}([\mathbb{1}_k]) = h_k$. Тем самым, отображение (7-20) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (7-18) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами[1] $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$. А именно:

$$\langle \mathrm{ch}([U]), \mathrm{ch}([W]) \rangle = \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu) \langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \sum_\mu z_\mu^{-1} \chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W]).$$

Из сл. 7.3 на стр. 99 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы: $[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]$. По форм. (4-18) на стр. 59 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[2]: $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu$. Поэтому выражение $\mathrm{ch}\left([S_\lambda]\right)$ через полиномы Шура тоже задаётся некой нижней унитреугольной матрицей:

$$\mathrm{ch}\left([S_\lambda]\right) = \mathrm{ch}\Big([M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\Big) = h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda} s_\mu .$$

Из равенств

$$1 = \left([S_\lambda],[S_\lambda]\right) = \langle \mathrm{ch}([S_\lambda]), \mathrm{ch}([S_\lambda]) \rangle = \langle s_\lambda, s_\lambda \rangle + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2 \langle s_\mu, s_\mu \rangle = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2$$

мы заключаем, что все $y_{\mu\lambda} = 0$ и $\mathrm{ch}\left([S_\lambda]\right) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 7.2 на стр. 96 и сл. 4.2 на стр. 60. □

Следствие 7.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 7.5 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения $[S_\nu]$ в $[S_\lambda]\,[S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[3] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu$.

Следствие 7.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda]\,[\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[4] для вычисления $s_\lambda h_1$. □

[1] См. предл. 4.2 на стр. 61.

[2] Напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д., и отлично от нуля только при $\mu \trianglerighteq \lambda$, а все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, см. обсуждение перед упр. 4.3 на стр. 56.

[3] См. теор. 4.2 на стр. 58.

[4] См. упр. 4.5 на стр. 59.

Следствие 7.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$ является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия и взаимности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в $\operatorname{res} S_\lambda$ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в $\operatorname{ind} S_\mu$. □

Следствие 7.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$
- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} \dots p_n(x)^{m_n} \prod_{i<j} (x_i - x_j)\,,$$
где $p_k(x) = \sum_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_j^{n-i}\right)$ — это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 7.4. Второе — из свойств скалярного произведения на кольце симметрических функций: поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\langle\, s_\lambda \,,\, p_\mu \,\rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ. Для доказательства третьего запишем s_λ по формуле Якоби–Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ и умножим обе части разложения $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ на Δ_δ. Получим равенство $p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu)\Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x)\Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

7.5.4. Размерности неприводимых представлений. По формуле Фробениуса размерность $\dim S_\lambda = \chi_\lambda(1)$ равна коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене $p_1^n \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \det\left(x_j^{n-i}\right) = \sum_{m_1 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)}$. Обозначим строго убывающие длины строк диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} \dots x_n^{\eta_n}$ в предыдущем произведении равен
$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) n!}{\prod_j \left(\eta_j - n + \sigma(j)\right)!} = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_j \eta_j(\eta_j - 1) \dots (\eta_j - n + \sigma(j) + 1)\,,$$

[1] См. n° 3.1.2 на стр. 37.

где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - n + \sigma(j) \geqslant 0$, и j-тый сомножитель последнего произведения сам является произведением $n - \sigma(j)$ последовательно убывающих чисел, начиная с η_j. Такая сумма равна

$$\det\begin{pmatrix} \eta_1 \dots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \dots (\eta_2 - n + 1) & \dots & \eta_n \dots (\eta_n - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 7.8. Покажите, что этот определитель равен $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 7.9 (формула Фробениуса для размерностей)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда $\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. □

Упражнение 7.9 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга λ Г-образную поддиаграмму, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что $\dim S_\lambda = n!/\prod_{a\in\lambda}\Gamma(a)$.

Например, длины крюков диаграммы $\lambda = (4, 2, 1)$ суть $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$, откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна $7!/(6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) = 7 \cdot 5 = 35$. Довольно нетривиальным следствием из упр. 7.9 и теор. 7.3 на стр. 100 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. К примеру, только что проделанное вычисление показывает, что стандартных таблиц формы $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1} \end{array}$ имеется ровно 35 штук.

Упр. 7.4. Будем писать $T \succ_a U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \succ_a U$ и $U \succ_b W$, то $T \succ_a W$ при $a \geqslant b$ и $T \succ_b W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 7.5. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU \succ qT$. По лем. 7.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (7-13) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

Упр. 7.8. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 7.9. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod_i \eta_i! / \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длина крюка i-той сверху клетки первого столбца равна $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.