§6. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, и $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

6.1. Скалярное произведение и базисные идемпотенты. Левое регулярное представление

$$L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G]),$$

в котором каждый элемент $f \in \Bbbk[G]$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, инъективно вкладывает групповую алгебру в алгебру линейных эндоморфизмов векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \Bbbk$, $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\Bbbk[G]) \subset \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ левого регулярного представления задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(L_f L_g) = \mathrm{tr}(L_{fg}). \tag{6-1}$$

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{6-2}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{6-3}$$

Упражнение 6.2. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены друг другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[2].

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет выразить скалярное произведение (6-1) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 6.1 (формула Планшереля)
Для всех $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f, g) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

[1] Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.
[2] Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.
[3] См. теор. 5.5 на стр. 76.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)}\mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\mathrm{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n\cdot\mathrm{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Определение 6.1 (базисные идемпотенты)
Элементы $e_\lambda = \mathfrak{rep}^{-1}(0,\dots,0,\mathrm{Id}_{U_\lambda},0,\dots,0)\in I_\lambda\subset\Bbbk[G]$, действующие тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях, называются *базисными*[1] *идемпотентами.*. Они образуют базис в центре групповой алгебры и перемножаются по правилам

$$e_\lambda e_\varrho = \begin{cases} e_\lambda & \text{при } \varrho=\lambda\\ 0 & \text{при } \varrho\neq\lambda\,.\end{cases} \tag{6-4}$$

В любом представлении $\Bbbk[G]\to\mathrm{End}(V)$ каждый из неприводимых идемпотентов e_λ действует как G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda\subset V$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что главный левый идеал $\Bbbk[G]\cdot e_\lambda$ является минимальным по включению ненулевым левым идеалом и как G-модуль[2] изоморфен неприводимому представлению U_λ. Покажите также, что порождённый e_λ двусторонний идеал в $\Bbbk[G]$ равен I_λ.

Следствие 6.1
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda,e_\lambda)=\dim^2 U_\lambda$. □

Следствие 6.2
Разложение $\Bbbk[G]=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $1\in\Bbbk[G]$ на идеалы I_λ.

Следствие 6.3
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)\cdot g\,, \tag{6-5}$$

и каждое представление $\Bbbk[G]\to\mathrm{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda\subset V$.

Доказательство. Согласно формуле (6-3) элемент $e_\lambda=|G|^{-1}\sum_{\mu\in\mathrm{Ir}(G)}(g^{-1},e_\lambda)\cdot g$. По формуле Планшереля $(g^{-1},e_\lambda)=\sum_{\mu\in\mathrm{Ir}(G)}\dim(U_\mu)\cdot\mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1}e_\lambda)\big)=\dim(U_\lambda)\cdot\mathrm{tr}\big(\lambda(g^{-1})\big)$, так как умножение слева на e_λ аннулирует все неприводимые U_μ с $\mu\neq\lambda$, а на U_λ действует тождественным оператором. □

[1] А также *неприводимыми* или *минимальными*

[2] Относительно действия группы G левыми умножениями.

6.2. Характеры. Линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *характером*[1] представления ϱ и обозначается

$$\chi_\varrho : \Bbbk[G] \to \Bbbk, \quad \chi_\varrho(f) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(f). \tag{6-6}$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (6-5) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

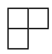
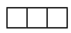
$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g, \tag{6-7}$$

Пример 6.1 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e\,. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

Упражнение 6.4. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	-1	1
треугольного	2	0	-1

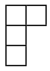
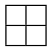
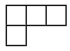
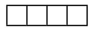
(6-8)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (6-7), совпадают с описанными ранее в прим. 5.5 на стр. 76.

[1] Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 5.4.1 на стр. 71.

Пример 6.2 (неприводимые характеры S_4)

В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 5.5 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(6-9)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 6.1

Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{6-10}$$

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{6-11}$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{6-12}$$

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{6-13}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (6-10). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (6-11). Формула (6-12) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 5.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 6.5. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Следствие 6.4

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\cdot\chi_\lambda \tag{6-14}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

6.2.1. Преобразование Фурье. Поскольку любая линейная форма однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\Bbbk[G]^*$ естественно изоморфно пространству $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$. Функция $\varphi : G \to \Bbbk$ задаёт форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, линейно продолжающую φ с G на $\Bbbk[G]$. С другой стороны, скалярное произведение на групповой алгебре биективно сопоставляет каждому вектору функционал скалярного умножения на этот вектор:

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^* , \quad f \mapsto (f, *) . \tag{6-15}$$

Прообразом стандартного базиса в $\Bbbk[G]^*$, двойственного к базису из элементов группы[1], при изоморфизме (6-15) является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. Комбинируя эти два отождествления, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] , \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \cdot g , \tag{6-16}$$

который иногда называют *преобразованием Фурье*. По форм. (6-7) на стр. 83 оно переводит характеры неприводимых представлений в элементы групповой алгебры, пропорциональные неприводимым идемпотентам:

$$\widehat{\chi}_\lambda = \frac{1}{\dim U_\lambda} \cdot e_\lambda . \tag{6-17}$$

Упражнение 6.6. Выясните, в какую операцию на групповой алгебре переходит поточечное умножение значений функций и какая операция над функциями соответствует умножению в групповой алгебре.

Перенесём с помощью изоморфизма (6-16) скалярное произведение из групповой алгебры в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \varphi(g^{-1})\psi(h^{-1})(g, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\psi(g) . \tag{6-18}$$

Из (6-17) и сл. 6.1 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным алгебраическим вычислениям с характерами.

Следствие 6.5
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 6.6
Для любых G-модулей V и W $\quad \dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \operatorname{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 5.6, правая — в силу сл. 6.4 и ортонормальности характеров. □

Следствие 6.7
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

[1] Ср. с формулами (6-2) и (6-3) на стр. 81.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (6-14) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 6.8
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 6.4 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 6.7. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.

Замечание 6.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$-й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g)\,.$$

Замечание 6.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)\,.$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 6.3 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени симплициального представления $\varDelta$ симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\mathbb{Q}^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \varDelta \oplus \mathbb{1}$. Поэтому его m-тая внешняя степень $\varLambda^m \tau \simeq \varLambda^m \varDelta \oplus \varLambda^{m-1} \varDelta$.

Упражнение 6.8. Покажите, что $\varLambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m} \varLambda^\alpha U \otimes \varLambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\varLambda^m\tau}, \chi_{\varLambda^m\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

пространства $\varLambda^m(\Bbbk^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn} \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\varLambda^k\tau}, \chi_{\varLambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{I\,:\,\sigma(I) \subset I} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \right) \cdot \left(\sum_{J\,:\,\sigma(J) \subset J} \operatorname{sgn}(\sigma|_J) \right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\substack{I,J\,:\,\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma\,:\,\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I, J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!}\sum_{I,J} k! \cdot (n-2m+k)! \cdot \Bigl(\sum_{g\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(g)\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{h\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(h)\Bigr). \tag{6-19}$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m - 1$. Проверим, что вклад всех слагаемых с такими значениями $k = |I \cap J|$ в сумму (6-19) равен по единице в каждом из двух случаев. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (6-19) имеет вид

$$\frac{1}{n!}\sum_{I} m! \cdot (n-m)!\,.$$

Он состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$, сумма которых равна 1. Во втором случае $|I \cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (6-19) равен

$$\frac{1}{n!}\sum_{I\cap J}\ \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\notin I\cap J}} (m-1)! \cdot (n-m-1)!\,.$$

Он состоит из $\binom{n}{m-1} \cdot (n-m+1)(n-m)$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)! \cdot (n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

сумма которых тоже равна 1.

6.2.2. Кольцо представлений. Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\Bbbk[G]$ всех функций $G \to \Bbbk$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается

$$\mathfrak{rep}(G) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Irr}(G)} \mathbb{Z}\cdot\chi_\lambda \subset \Bbbk^G\,.$$

Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в $\mathfrak{rep}(G)$ отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца $\mathfrak{rep}(G)$, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

6.3. Индуцированные представления. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\operatorname{res} W$ или $\operatorname{res}_A^B W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексных векторных пространств: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-

мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_{\mathbb{R}} = \operatorname{res}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль $\operatorname{ind} V = B \otimes_A V$, который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями

$$ba \otimes v - b \otimes av\,, \text{ где } b \in B\,,\ a \in A\,,\ v \in V\,.$$

По построению, в пространстве $B \otimes_A V$ выполняются равенства $ba \otimes_A v = b \otimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над A*. Структура модуля над B задаётся правилом

$$b\,(b' \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (bb') \otimes v\,.$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$. Если важно указать алгебры B и A явно, мы пишем $\operatorname{ind}^B_A V$.

Предложение 6.2

Отображение $\tau_A : V \to B \otimes_A V\,,\ v \mapsto 1 \otimes_A v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(\operatorname{ind} V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(V, \operatorname{res} W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A\,. \tag{6-20}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \otimes_A U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W\,, \quad v \mapsto \psi(1 \otimes_A u)$$

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \otimes_A av) = \psi(a \otimes_A v) = a\psi(1 \otimes_A v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (6-20) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \otimes_A V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 6.9. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 6.2 определяет B-модуль $B \otimes_A V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

6.3.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\operatorname{res}\varrho \overset{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)$ на подгруппу H, а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\operatorname{ind}\lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G]\otimes_{k[H]}V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind}V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \operatorname{res}W)$. Если нужно подчеркнуть, о каких G и $H \subset G$ идёт речь, мы пишем res_H^G и ind_H^G. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathfrak{rep}(H) \underset{\text{res}}{\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{rep}(G)$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения (6-18) на $\Bbbk^G$

$$(\chi_{\operatorname{ind}V}, \chi_W)_{\Bbbk^G} = (\chi_V, \chi_{\operatorname{res}W})_{\Bbbk^H}\,.$$

В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda\,(\operatorname{res}\mu) = m_\mu\,(\operatorname{ind}\lambda)\,. \tag{6-21}$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[1].

Предложение 6.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U \simeq \operatorname{ind}_H^G U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_K(U, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(\operatorname{ind}_K^H U, W) \simeq \mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U, W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H\,,$$

отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \operatorname{ind}_H^G \operatorname{ind}_K^H U$ универсально в смысле предл. 6.2. По упр. 6.9 оно отождествляется с отображением $U \to \operatorname{ind}_K^G U$ единственным изоморфизмом. □

6.3.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G] \otimes U = \bigoplus_{g\in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh)\otimes v = g \otimes (vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, \dots, g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G] \bigoplus_{\Bbbk[H]} V \simeq g_1V \oplus g_2V \oplus \dots \oplus g_rV\,. \tag{6-22}$$

[1] Или *двойственностью Фробениуса*.

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-й копии $g_\nu V$ пространства V, то каждый вектор $w \in \Bbbk[G] \otimes_{k[H]} V$ однозначно запишется в виде суммы $\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu$, где $v_\nu \in V$. Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для каждых $g \in G$ и $\nu \in \{1, \dots, r\}$ найдутся единственные такие $h = h(g, \nu) \in H$ и $\mu = \mu(g, \nu) \in \{1, \dots, r\}$, что $g g_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $g g_\nu v \overset{\text{def}}{=} g_\mu h v \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ согласно представлению подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

Пример 6.4

Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e + \tau + \tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в $\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2]$.

Упражнение 6.10. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 6.4

Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

[1] Ниже, в теор. 9.2 на стр. 131 мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$.

Предложение 6.5
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение $\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \,/\, |C|$. В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\operatorname{ind}\mathbb{1}}(C) = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| \,. \tag{6-23}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (6-22), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = \sum_{\substack{\nu :\\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G :\\ s^{-1} g s \in H}} \chi_V(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s \in G :\\ s^{-1} g s \in D_i}} \chi_V(D_i) \,.$$

Во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1} g s$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Так как различных произведений $s^{-1} g s \in D_i$ имеется $|D_i|$ штук и по формуле для длины орбиты каждое из них получается из $|G|/|C|$ различных $s \in G$, характер $\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = |H|^{-1} \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \cdot |G|/|C|$. □

Упражнение 6.11 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1] $\operatorname{ind}\big((\operatorname{res} W) \otimes V\big) \simeq W \otimes \operatorname{ind} V$.

6.3.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль* $\operatorname{coind} V \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_A(B, V)$, на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргумента $b : \psi \mapsto b\psi$, где $b\psi(b') \overset{\text{def}}{=} \psi(b'b)$.

Упражнение 6.12. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\,\psi = b_1(b_2\psi)$.

Коиндуцированный модуль обладает двойственным к описанному в предл. 6.2 универсальным свойством: каноническое отображение $\tau^A : \operatorname{Hom}_A(B, V) \to V$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, A-линейно, и для любых B-модуля W и A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, что $\tau^A \circ \psi = \varphi$, т. е. для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(W, \operatorname{coind} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\operatorname{res} W, V) \,, \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi \,, \tag{6-24}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V \,, \quad w \mapsto \psi_w(1) \,.$$

[1] Тензорные произведения в обеих частях суть тензорные произведения представлений групп H и G, описанные в n° 5.4 на стр. 70.

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi : W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V), \quad w \mapsto \psi_w, \quad \text{где} \quad \psi_w : B \to V, \quad b \mapsto \varphi(bw).$$

Упражнение 6.13. Убедитесь, что оба гомоморфизма корректно определены и обратны друг другу.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств

$$\Phi \otimes \mathrm{Id}_V : \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V,$$

действующий на операторы ранга 1 по правилу

$$\xi \otimes v \mapsto \hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi\left(g^{-1}\right) \cdot g \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes \left(\xi \otimes v(g^{-1})\right)$$

и переводящий произвольный линейный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ в тензор

$$\widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(g),$$

называемый *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi},$$

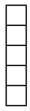
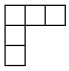
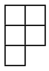
а его композиция с проекцией $\Bbbk[G] \otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) \subset \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V)$ с индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}\, V = \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$.

Упражнение 6.14. Докажите последнее утверждение.

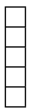
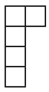
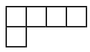
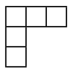
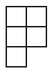
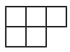
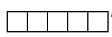
Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

[1] См. формулу (6-16) на стр. 85.

Упр. 6.7. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом A_5, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление $\varDelta$. Представления $\operatorname{sgn} \otimes \varDelta$ и $\Lambda^2\varDelta$ тоже неприводимы, а $S^2\varDelta = \operatorname{sgn} \oplus \varDelta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление, которое геометрически описывается как действие $S_5 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на пространстве функций на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений. Изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$ задаётся действием группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ сопряжениями на множестве нелинейных[1] инволюций без неподвижных точек на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							′
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 6.8. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-й степени.

[1] Т. е. не лежащих в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. На шеститочечном множестве $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$ имеется 15 инволюций без неподвижных точек, и ровно 10 из них лежат в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. Последние находятся в биекции с такими точками плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2\mathbb{F}_5^2)$, которые не являются произведениями ab точек $a, b \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$. Ср. с примером 18.5 на стр. 233 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_18.pdf.

Упр. 6.10. Каноническое отображение B-модулей $B \otimes_A A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 6.14. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, \dots, g_r\}$ смежных классов G / H. Тогда $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_rH = Hg_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup Hg_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = hv_\nu$. Поэтому

$$\dim \mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V \,.$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_\nu \sum_{h \in H} g_\nu h^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|} \sum_\nu g_\nu v_\nu \in \bigoplus_\nu g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.