§5. Основные понятия теории представлений.

5.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \overset{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, то векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk\, t$ одномерно с базисом t, а ассоциативная алгебра $A_t = T(\Bbbk\, t)$, т. е. тензорная алгебра одномерного векторного пространства, изоморфна алгебре $\Bbbk[t]$ многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \cdots \otimes t \in (\Bbbk\, t)^{\otimes n}$ моном t^n.

Отображение $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W над полем $\Bbbk$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. По универсальному свойству свободной алгебры A_R, линейные представления $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)$. Последние называются *линейными представлениями* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным на нём представлением множества R или алгебры A_R называется, соответственно, R-модулем или A_R-модулем. И то, и другое равносильно сопоставлению каждому элементу $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Произвольные тензоры $f = \sum_{f_1,\dots f_m \in R} x_{f_1\dots f_m} f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \in A_R$ с $f_\nu \in R$, $x_{f_1\dots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами $\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1\dots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \cdots \circ \varrho(f_m) : W \to W$, а образ гомоморфизма алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)$ состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить из представляющих элементы множества R операторов $\varrho(f)$ при помощи композиций, сложения и умножения на числа. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \operatorname{End}(W)$ и обозначается $\operatorname{Ass}\big(\varrho(R)\big) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} \tilde{\varrho}$.

Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \overset{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F,\ u \in U\}$.

5.1.1. Разложимость, приводимость и полупростота. Векторное подпространство U в R-модуле W называется *R-подмодулем* или *R-инвариантным подпространством*, если $RU \subset U$. Как обычно, мы называем R-подмодуль U *нетривиальным*, если он отличен от нуля и всего пространства W.

Упражнение 5.1 (фактор модули). Убедитесь, что для всякого R-подмодуля $U \subset W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура R-модуля, на котором элементы $f \in R$ действуют по правилу $f[w] \overset{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U.

R-модуль W называется *простым*, если у него нет нетривиальных подмодулей. Представление $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$, задающее простой модуль, называется *неприводимым*. R-модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих нетривиальных R-подмодулей. Всякий конечномерный R-модуль является прямой суммой неразложимых, однако неразложимые модули, вообще говоря, могут быть приводимыми.

Если R-модуль W является прямой суммой *неприводимых* R-подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \to \operatorname{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R-модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и

$A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \mathrm{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\mathrm{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

Пример 5.1 (пространство с одним оператором)

Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \mathrm{End}\, W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}(W), \ t \mapsto f, \tag{5-1}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (5-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал (μ_f), порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор[1] f. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (5-1), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}, \tag{5-2}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно пространству $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводим если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 5.4. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем если и только если он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[2].

Пример 5.2 (коммутирующие операторы)

В прошлом году мы видели[3], что если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а векторное пространство W конечномерно, то любое множество коммутирующих операторов $R \subset \mathrm{End}(W)$ имеет общий для всех операторов собственный вектор. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем конечномерные неприводимые представления любого множества коммутирующих операторов исчерпываются одномерными представлениями[4].

---

[1] Напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f.

[2] В частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

[3] См. раздел 10.2.7 на стр. 142 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_10.pdf.

[4] Обратите внимание, что любое одномерное представление по очевидным причинам неприводимо.

Тогда же и там же мы видели, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно одновременно диагонализовать в некотором общем для всех операторов базисе. Это означает, что каждое конечномерное представление любого множества диагонализуемых коммутирующих операторов вполне приводимо и является прямой суммой одномерных представлений.

Лемма 5.1
Пусть R-модуль[1] W линейно порождается над $\Bbbk$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R-подмодулей. Тогда у любого R-подмодуля $U \subsetneq W$ имеется дополнительный R-подмодуль $V \subset W$, такой что $W = U \oplus V$, причём этот подмодуль V является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прамой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

Доказательство. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S, равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$ и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом[2].

По лемме Цорна[3] в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V. Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U, мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V. Всё сказанное работает и для $U = 0$. □

Теорема 5.1
Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого нетривиального R-подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 5.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \twoheadrightarrow U$, $u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R, т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U.

Упражнение 5.7. Убедитесь, что это подпространство является простым R-подмодулем в U.

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множе-

[1] Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\Bbbk$.

[2] Т. е. каждое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{S}'$ имеет верхнюю грань, см. раздел 1.7 на стр. 15 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_01.pdf.

[3] См. раздел 1.9 на стр. 17 той же лекции.

ство непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что чум $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M. Если он не совпадает с W, то найдётся такой нетривиальный подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть нетривиальный простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M. Тем самым, $M = W$. □

Следствие 5.1 (критерии полупростоты)
Пусть каждый ненулевой R-подмодуль в R-модуле[1] W содержит в себе конечномерный ненулевой R-подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

1) W полупрост
2) W линейно порождается над $\Bbbk$ простыми R-подмодулями
3) для любого нетривиального R-подмодуля $U \subset W$ существует такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если R-подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\Bbbk$, то каждый его R-подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 5.1. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) была установлена в лем. 5.1. □

5.1.2. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[2], если оно перестановочно с действием всех операторов из R, т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd}.$$

Примером R-линейного отображения является проекция разложимого R-модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из упр. 5.6 на стр. 64. Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall\, w \in W_1,\ \forall\, f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что а) $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ б) композиция R-линейных отображений R-линейна в) ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями г) образ и полный прообраз любого R-модуля относительно гомоморфизма R-модулей являются R-модулями.

Лемма 5.2 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda\,\mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

[1]Который не предполагается конечномерным.
[2]А также *сплетающим оператором*, *гомоморфизмом представлений* или *R-линейным отображением*.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$, $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочно со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\operatorname{im}\varphi \subset W_2$ являются R-подмодулями простых модулей, либо $\ker\varphi = W_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$ и тогда при $\varphi \neq 0$ ненулевой подмодуль $\operatorname{im}\varphi \subset W_2$ совпадает с W_2, т. е. φ одновременно инъективно и сюръективно.

Рассмотрим теперь R-линейный эндоморфизм $\varphi : W \to W$. Для каждого $\lambda \in \Bbbk$ эндоморфизм $\lambda\,\mathrm{Id} - \varphi$ тоже R-линеен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, существует такое $\lambda \in \Bbbk$, что R-подмодуль $\ker(\lambda\,\mathrm{Id} - \varphi) \neq 0$. Если W неприводим, это ядро совпадает со всем модулем W, т. е. $\varphi = \lambda\,\mathrm{Id}$. □

Следствие 5.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

Упражнение 5.10. Пусть линейный оператор $\pi : V \to V$ имеет $\pi^2 = \pi$. Убедитесь, что $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$ и π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$, причём если оператор π является R-линейным, то $\ker\pi$ и $\operatorname{im}\pi$ являются R-подмодулями, а оператор $1 - \pi$ является R-линейным проектором на $\ker\pi$ вдоль $\operatorname{im}\pi$.

Следствие 5.3
Фактор модуль любого полупростого R-модуля W тоже полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R-подмодуля $S \subset W$ при любой R-линейной сюрьекции $\pi : W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. □

Предложение 5.1
В условиях сл. 5.1 на стр. 65 полупростота R-модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R-линейный эндоморфизм $\pi_U \in \mathrm{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\operatorname{im}\pi_U = U$.

Доказательство. В прошлом году мы видели[1], что каждый $\Bbbk$-линейный оператор $\pi : W \to W$, удовлетворяющий соотношению $\pi^2 = \pi$, проектирует пространство W на подпространство $\operatorname{im}\pi$ вдоль подпространства $\ker\pi$, т. е. $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$ и $\pi(u) = u$ для всех $u \in \operatorname{im}\pi$. Если оператор $\pi_U : W \to W$ удовлетворяет условиям предложения и R-линеен, его ядро и образ являются R-подмодулями в W, и наличие такого оператора равносильно наличию прямого разложения $W = U \oplus \ker\pi_U$. □

[1] См. пример 10.4 на стр. 143 лекции
http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_11.pdf.

Следствие 5.4
Каждый подмодуль полупростого R-модуля тоже полупрост.

Доказательство. Пусть R-модуль L является нетривиальным подмодулем полупростого R-модуля W. Каждый R-подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W, является образом R-линейного проектора $W \twoheadrightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R-линейным проектором $L \twoheadrightarrow U$. □

5.2. Представления ассоциативной алгебры. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varrho : A \to \operatorname{End} V$$

называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V. Пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов, и к ним в полной мере приложима вся терминология из n° 5.1.1 на стр. 62. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\operatorname{Hom}_A(U,V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A,\ \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*. Когда $U = W$ все A-линейные эндоморфизмы A-модуля W образуют ассоциативную $\Bbbk$-подалгебру $\operatorname{End}_A(W) \subset \operatorname{End}_{\Bbbk}(W)$ в $\Bbbk$-алгебре всех $\Bbbk$-линейных эндоморфизмов векторного пространства W. Подалгебру $\operatorname{End}_A(W)$ обычно называют *централизатором* A в $\operatorname{End}_{\Bbbk}(W)$.

Пусть $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ является прямой суммой своих A-подмодулей V_ν. Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W, а через $\pi_\mu : W \twoheadrightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ на μ-е слагаемое.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что $\sum_\nu \iota_\nu\pi_\nu = \mathrm{Id}_W$, $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{V_\nu}$ для всех ν, $\pi_\nu\iota_\mu = 0$ и $\iota_\mu\pi_\nu = 0$ для всех $\mu \neq \nu$.

Для каждого $\varphi \in \operatorname{End}(W)$ положим $\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu$ и организуем эндоморфизмы $\varphi_{\mu\nu} : V_\nu \to V_\mu$ в квадратную матрицу $(\varphi_{\mu\nu})$. Исходный эндоморфизм φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \mathrm{Id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_W = \Big(\sum_\mu \iota_\mu\pi_\mu\Big) \circ \varphi \circ \Big(\sum_\nu \iota_\nu\pi_\nu\Big) = \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu\varphi_{\mu\nu}\pi_\nu\,.$$

При этом $\varphi \in \operatorname{End}_A(W)$ если и только если все $\varphi_{\mu\nu} \in \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)$. Таким образом, имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\operatorname{End}_A(W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mu,\nu} \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)\,, \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu})\ . \tag{5-3}$$

Упражнение 5.12. Убедитесь, что изоморфизм (5-3) переводит композицию эндоморфизмов в произведение матриц.

В ситуации, когда все слагаемые $V_\nu = V$ являются копиями одного и того же A-модуля V, изоморфизм (5-3) превращается в изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\operatorname{End}_A\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \operatorname{Mat}_n\left(\operatorname{End}_A(V)\right)\ . \tag{5-4}$$

Теорема 5.2 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$. Тогда $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \dots, e_n$ и покажем, что для каждого B-линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, \dots, v_n) = (f v_1, \dots, f v_n)$ для каждого оператора f из A, из B или из $\mathrm{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \dots, e_n) \in W$ через e. Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A-модуль, его A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ. Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. □

Следствие 5.5 (теорема Бернсайда)
Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[1] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$, откуда $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 5.13. Докажите, что обратная импликация: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим, имеет место над любым полем $\Bbbk$.

5.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A. Для произвольных A-модулей U, W на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ имеется естественная структура A-модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \overset{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U \to W\,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,, \tag{5-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом.

Упражнение 5.14. Убедитесь в этом.

Для простого A-модуля U образ канонической свёртки (5-5) обозначается $W_U = \operatorname{im} c_{WU} \subset W$ и называется *U-изотипной компонентой* модуля W. Он равен сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U. Действительно, всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$ инъективен, и любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U, W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U, и наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$.

[1]См. лем. 5.2 на стр. 65.

Предложение 5.2
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\operatorname{im} c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \operatorname{im} c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, W)$. □

Предложение 5.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого неприводимого A-модуля U и произвольного A-модуля W каноническая свёртка (5-5) инъективна и, тем самым, задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U .$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U, модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i, каждый из которых изоморфен U. Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 5.2 пространство $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \operatorname{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, V_i)$ является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому каждый элемент модуля $\operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

Предложение 5.4 (изотипное разложение)
Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U, то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus\nolimits_U W_U , \tag{5-6}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\operatorname{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, W_i)$ и $\operatorname{Hom}_A(U, W_j) = 0$ для всех $W_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (5-5) лежит в сумме тех подмодулей W_i, что изоморфны U. □

Определение 5.1
Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в любом разложении модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, обозначается

$$m_U \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U , \tag{5-7}$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 5.6
Для конечномерных полупростых A-модулей V, W над алгебраически замкнутым полем выполняется равенство $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(U)\, m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому размерность пространства $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(U)\, m_U(W)$, и то же самое верно для $\mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

5.4. Линейные представления группы. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам

$$g(u \dotplus w) \overset{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw) \qquad g(u \otimes w) \overset{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw)$$
$$g(u_1 \wedge u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2) \qquad g(u_1 \cdot u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2)\,.$$

Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \overset{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 5.15. Убедитесь, что все эти формулы корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U \otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление* $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна, т. е.

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, \xi \in V^*,\ \forall\, w \in V \quad \langle\, \varrho^*(g)\,\xi\,,\, \varrho(g)\,w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,. \tag{5-8}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (5-8) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, \varrho(g^{-1})v\,\rangle\,,$$

которое означает, что оператор $\varrho^*(g) = \varrho(g^{-1})^*$ двойствен оператору $\varrho(g)^{-1}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1}v)$. В частности, матрица оператора $\varrho^*(g)$ в двойственном базисе получается из матрицы $\varrho(g)$ обращением и транспонированием.

Упражнение 5.16. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U,V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}\,. \tag{5-9}$$

Упражнение 5.17. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (5-9) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall\, g \in G\ g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством G-*инвариантных* операторов[1].

[1] А также *сплетающих* операторов, G-*линейных* операторов или G-*гомоморфизмов*.

Лемма 5.3
Пусть $|G| = n$, а основное поле $\Bbbk$ содержит все n корней n-той степени из единицы и $\operatorname{char} \Bbbk \nmid n$. Тогда в любом конечномерном представлении группы G над полем $\Bbbk$ все её элементы действуют диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 5.4 такой оператор диагонализуем. □

5.4.1. Представления конечных абелевых групп. Пусть G — конечная абелева группа, основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Из лем. 5.3 и сказанного в прим. 5.2 на стр. 63 следует, что всякое конечномерное линейное представление группы G является прямой суммой одномерных. Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве V скалярен, операторы $g \in G$ действуют на векторы $v \in V$ по правилу

$$gv = \chi(g)\, v\,, \text{ где } \chi : G \to \Bbbk^* \text{ — мультипликативный гомоморфизм,} \tag{5-10}$$

сопоставляющий элементу $g \in G$ тот скаляр, которым он действует на V. Гомоморфизмы абелевой группы G в мультипликативную группу поля $\Bbbk$ называются *мультипликативными характерами* группы G. Одномерный G-модуль, на котором G действует по формуле (5-10) обозначается через V_χ.

Упражнение 5.18. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого характера лежит в мультипликативной подгруппе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Сами характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта группа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_{\mathbb{1}} \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к $\chi \in G^\wedge$ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \overset{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$.

Упражнение 5.19. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

Пример 5.3 (представление в пространстве функций на группе)
Группа G действует на пространстве $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$.

Упражнение 5.20. Убедитесь, что для любой (в том числе неабелевой) группы G это правило задаёт гомоморфизм группы G в группу линейных автоморфизмов пространства $\Bbbk^G$.

Для каждого характера $\chi \in G^\wedge$ изотипная компонента $\Bbbk^G_\chi$ представления группы G в пространстве $\Bbbk^G$ состоит из таких функций $f : G \to \Bbbk$, что $f(g^{-1}x) = \chi(g)f(x)$ для всех $x, g \in G$. Каждая такая функция пропорциональна характеру χ^{-1}, обратному к χ в группе $G^\wedge$, поскольку полагая в предыдущем равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)\, f(e)$ для всех $g \in G$, откуда, переобозначая g^{-1} через h, получаем для всех $h \in G$ равенство $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$. Таким образом, каждая изотипная компонента представления $\Bbbk^G$ одномерна, и изотипное разложение пространства функций на группе G имеет вид $\Bbbk^G = \bigoplus_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk\, \chi$, т. е. в представлении группы G на пространстве функций $G \to \Bbbk$ содержится с кратностью один каждое из неприводимых представлений группы G. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$.

Упражнение 5.21. Покажите, что всякое множество различных гомоморфизмов $G \to \Bbbk^*$ произвольной (не обязательно абелевой) группы G в мультипликативную группу любого поля $\Bbbk$ линейно независимо в пространстве $\Bbbk^G$.

Теорема 5.3 (двойственность Понтрягина)
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\cdot\mathrm{ev}_g(\chi_2)\,.$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\cdot\chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\ \mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \to \Bbbk$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

Замечание 5.1. (преобразование Фурье) Двойственность Понтрягина имеет место в классе всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь простейшими примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G *непрерывных* гомоморфизмов $G \to \mathbb{C}^*$. Например, мультипликативная группа $\mathrm{U}(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $\mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}(1)$ — характер $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto e^{2\pi i \alpha x}$. Сказанное в прим. 5.3 выше также обобщается: каждая достаточно регулярная функция на группе единственным образом «линейно выражается» через характеры. Для группы $\mathrm{U}(1)$ это означает разложение функции $f : \mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f^\wedge(m)\,z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha)\,e^{2\pi i \alpha x}\,d\alpha\,,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собою функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \to \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам[1], и с учётом двойственности Понтрягина $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием* Фурье.

[1] Для конечных (в том числе неабелевых) групп мы напишем эти формулы в n° 6.2.1 на стр. 85 ниже.

5.4.2. Проектор на инварианты. Рассмотрим теперь линейное представление V произвольной, не обязательно абелевой, группы G. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в V *подмодуль G-инвариантов*, обозначаемый

$$V^G \overset{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid gv = v \;\; \forall\, g \in G \} .$$

Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, каждое линейное представление V группы G допускает G-инвариантную проекцию на подмодуль инвариантов. Она обозначается $v \mapsto v^\natural$ («v-бекар») и сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести[1] его G-орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$:

$$v^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv , \tag{5-11}$$

Упражнение 5.22. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G, а также приведите пример конечной группы G и неразложимого G-модуля V над конечным полем $\Bbbk$, имеющего ненулевой подмодуль инвариантов V^G.

Теорема 5.4
Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[2].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-инвариантного проектора[3]. Группа G действует на пространстве $\Bbbk$-линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\varphi \mapsto \varphi^\natural = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит любой проектор $\pi : V \twoheadrightarrow U$ тоже в проектор V на U. Поскольку $g\pi g^{-1} U \subset U$ для всех $g \in G$, образ $\mathrm{im}\,\pi^\natural \subset U$. С другой стороны, любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^\natural$, так как $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = gg^{-1}u = u$. □

5.5. Групповая алгебра. С каждой группой G связана ассоциативная алгебра $\Bbbk[G]$, которая называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$ и представляет собою векторное пространство с базисом G, т. е. состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} c_g g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $c_g \in \Bbbk$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок. При этом константы c_g по определению коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле $\Bbbk$, а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции, т. е.

$$\begin{gathered} \Big(\sum_g a_g g\Big)\Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f , \\ \text{где} \quad c_f = \sum_{gh = f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f} . \end{gathered} \tag{5-12}$$

[1] Если $|G| \,\vdots\, \mathrm{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.
[2] Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений.
[3] См. предл. 5.1 на стр. 66.

Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 5.23. Убедитесь, что правило $m \mapsto t^m$ задаёт изоморфизмы

$$\Bbbk[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t, t^{-1}] \qquad \text{и} \qquad \Bbbk[\mathbb{Z}/(n)] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t]/(t^n - 1)\,.$$

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\Bbbk[G]$ имеется *оператор усреднения*

$$\pi_{\mathbb{1}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \Bbbk[G]\,. \tag{5-13}$$

Каждое линейное представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит элемент (5-13) в проектор (5-11) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ϱ.

Упражнение 5.24. Покажите, что элемент (5-13) лежит в центре[1] алгебры $\Bbbk[G]$.

5.5.1. Центр групповой алгебры конечной группы G

$$Z(\Bbbk[G]) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

состоит из всех таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h \in \Bbbk[G]$, коэффициенты которых z_h постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h\,, \tag{5-14}$$

где C пробегает множество $\mathrm{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис $Z(\Bbbk[G])$ как векторного пространства над $\Bbbk$. В частности, $\dim_{\Bbbk} Z(\Bbbk[G]) = |\mathrm{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Каждое линейное представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V, перестановочные со всеми операторами из группы G. Из теоремы Бернсайда[2] вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

5.5.2. Изотипные разложения. Пусть G — конечная группа. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя

$$\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$$

и обозначим множество всех таких представителей через $\mathrm{Ir}(G)$. По теор. 5.4 на стр. 73 и предл. 5.4 на стр. 69 каждый конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} V_\lambda\,, \tag{5-15}$$

[1] Напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K.

[2] См. сл. 5.5 на стр. 68.

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$. Подмодуль $V_\lambda \subset W$ является образом канонической свёртки

$$c: \ \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \to V\,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,. \tag{5-16}$$

В любом разложении V в прямую сумму простых G-модулей сумма всех изоморфных U_λ слагаемых совпадает[1] с V_λ, и их количество $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, каноническая свёртка (5-16) является изоморфизмом на изотипную компоненту V_λ, и для любых двух представлений V и W группы G

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\, m_\lambda(W) = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)\,. \tag{5-17}$$

Пример 5.4 (левое регулярное представление)
Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* $g : x \mapsto gx$ группы G в $\Bbbk[G]$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda\,. \tag{5-18}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Правое умножение на любой элемент $h: x \to xh$ является G-автоморфизмом левого регулярного представления[2] и, стало быть, переводит каждую изотипную компоненту I_λ в себя. Поэтому каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho\,. \tag{5-19}$$

Упражнение 5.25. Докажите, что I_λ являются минимальными по включению ненулевыми двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$, и что все двусторонние идеалы $\Bbbk[G]$ в исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ.

Лемма 5.4
Любое представление $\varrho: \ \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ, переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого вектора $v \in V$ подпространство $I_\lambda v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v \in V$. □

[1] См. предл. 5.4 на стр. 69.
[2] Ибо левое и правое умножение на любые два фиксированных элемента группы перестановочны друг с другом.

Теорема 5.5 (теорема Машке)

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \to \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda), \tag{5-20}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 5.4 на стр. 75 каждое неприводимое представление $\lambda : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (5-18) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}\,|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. Отсюда сразу следует, что неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число и каждое из них присутствует в изотипном разложении (5-18) левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim(I_\lambda) / \dim(U_\lambda) = \dim \mathrm{End}(U_\lambda) / \dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\mathfrak{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 5.7

Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (5-20). □

Пример 5.5 (простенькие представления симметрических групп)

Сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[2]. Таким образом, неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга. У каждой симметрической группы S_n есть два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Если характеристика поля не делит n, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

[1] См. сл. 5.5 на стр. 68.

[2] Длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка.

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 5.26. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \dots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$-мерное представление в фактор пространстве $\Bbbk^n/\Bbbk\, e$ называется *симплициальным*[1], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e.

Упражнение 5.27. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, что согласуется с равенством $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3}(1+\mathrm{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right)\,,$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 5.28. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление несобственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список неприводимых представлений.

Упражнение 5.29. Покажите, что два трёхмерных представления не изоморфны и получаются одно из другого тензорным умножением на знаковое представление.

5.6. Представления Шура полной линейной группы. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль, а V ненулевое конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Ir}(S_n)} V_\lambda^{\otimes n} \tag{5-21}$$

называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте $V_\lambda^{\otimes n}$, говорят, что они имеют тип симметрии λ.

Пример 5.6 (квадратичные и кубические тензоры)
Два неприводимых представления группы $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ задают разложение тензорного квадрата

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)\,.$$

[1] При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.

Группа S_2 действует на первом слагаемом тривиально, на втором — знакопеременно. Трём неприводимым представлениям группы S_3: тривиальному, знаковому и группой треугольника отвечает разложение

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V) \oplus V_\Delta^{\otimes 3}\,, \tag{5-22}$$

компоненты которого являются образами S_3-инвариантных проекторов sym_3, alt_3 и π_Δ, описанных в прим. 5.5. Пространство неподвижных тензоров последнего

$$V_\Delta^{\otimes 3} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau t + \tau^2 t = 0\}$$

состоит из всех кубических тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Такие тензоры называются *лиевскими*[1], а соотношение $t + \tau t + \tau^2 t = 0$, которому они удовлетворяют, называется *тождеством Якоби*. S_3-орбита каждого лиевского тензора порождает в $V^{\otimes 3}$ двумерное векторное пространство, на котором S_3 действует как группа треугольника. Примером лиевского тензора служит $[u, [u, w]] = u \otimes u \otimes w - 2\, u \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes u$, где $u, w \in V$ — линейно независимые векторы, а $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ обозначает коммутатор в тензорной алгебре $T(V)$.

Упражнение 5.30. Покажите, что подпространство $V_\Delta^{\otimes 3} \subset V^{\otimes 3}$ является линейной оболочкой всех кубических тензоров, которые можно получить из векторов пространства V при помощи бинарной операции взятия коммутатора в $T(V)$.

5.6.1. Действие $\mathbf{GL}(V) \times S_n$ на $V^{\otimes n}$. Гомоморфизм групп

$$\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^{\otimes n})\,, \quad f \mapsto f^{\otimes n}\,,$$

задаёт представление полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$. В этом представлении оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует на разложимые тензоры по правилу

$$f : v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f v_1 \otimes \cdots \otimes f v_n\,.$$

Так как это действие перестановочно с действием симметрической группы, пространство $V^{\otimes n}$ является модулем над прямым произведением групп $\mathrm{GL}(V) \times S_n$: элемент $f \times g \in \mathrm{GL}(V) \times S_n$ действует на нём оператором

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_{g(1)}) \otimes \cdots \otimes f(v_{g(n)})\,.$$

Будучи перестановочными с операторами из S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту разложения $V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(S_n)} V_\lambda^{\otimes n}$ по типам симметрии тензоров. Тем самым, все S_n-изотипные подпространства $V_\lambda^{\otimes n}$ тоже являются $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-модулями.

Для каждого неприводимого S_n-модуля U_λ тензорное произведение

$$\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda$$

является $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-модулем с действием $f \times g : \varphi \otimes u \mapsto (f^{\otimes n} \circ \varphi) \otimes (gu)$. По предл. 5.3 свёртка $\varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)$ задаёт изоморфизм[2]

$$c : \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} V_\lambda^{\otimes n}\,, \tag{5-23}$$

[1] В честь норвежского математика Софуса Ли.

[2] Строго говоря, предл. 5.3 утверждает это над алгебраически замкнутым полем, однако мы увидим ниже, что все комплексные неприводимые представления группы S_n определены над $\mathbb{Q}$, так что для симметрических групп предл. 5.3 справедливо над $\mathbb{Q}$.

очевидно перестановочный с действием $\mathrm{GL}(V) \times S_n$. Пространство

$$\mathbb{S}^\lambda V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \tag{5-24}$$

с действием $\mathrm{GL}(V)$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n} \circ \varphi$ называется *модулем Шура* над полной линейной группой $\mathrm{GL}(V)$.

Лемма 5.5
Линейная оболочка операторов вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$ совпадает с централизатором $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right)$ действия S_n на $V^{\otimes n}$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n*} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq \left(V^* \otimes V\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$$

отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right) \subset \mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ с подпространством симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n\big(\mathrm{End}(V)\big) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$, которое линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$ в силу следующего общего принципа:

Упражнение 5.31 (принцип Аронгольда). Покажите, что для любого конечномерного векторного пространства W над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(W) \subset W^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $w^{\otimes n} = w \otimes \cdots \otimes w$.

Упражнение 5.32 (усиленный принцип Аронгольда). В условиях упр. 5.31 покажите, что для любого ненулевого многочлена F на W пространство $\mathrm{Sym}^n(W)$ линейно порождается тензорами $w^{\otimes n}$ с $F(w) \neq 0$.

Применяя усиленный принцип Аронгольда к $W = \mathrm{End}(V)$ и $F = \det$, получаем утверждение леммы. □

Предложение 5.5
Все $\mathrm{GL}(V)$-модули Шура $\mathbb{S}^\lambda V = \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right)$ неприводимы.

Доказательство. Изоморфизм $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda \;\simeq\; V_\lambda^{\otimes n}$ из формулы (5-23) переводит действие S_n на $V_\lambda^{\otimes n}$ в действие $g : \varphi \otimes u \mapsto \varphi \otimes (gu)$. Каждый линейный оператор $F \in \mathrm{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda$, перестановочное с действием S_n. По лем. 5.5 оно лежит в линейной оболочке операторов $f : \varphi \otimes u \mapsto \left(f^{\otimes n} \circ \varphi\right) \otimes u$. Следовательно, образ представления Шура $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ линейно порождает всю алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ пространства $\mathbb{S}^\lambda(V)$. По упр. 5.13 такое представление неприводимо. □

5.6.2. Соответствие Шура – Вейля. Соответствие $U_\lambda \leftrightarrow \mathbb{S}^\lambda V$ между неприводимыми представлениями симметрических групп[1] и неприводимыми представлениями полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ называется *соответствием Шура – Вейля*. Тривиальному одномерному представлению группы S_n при этом отвечает представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $S^n V$, а одномерному знаковому представлению — представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $\Lambda^n V$. Можно показать,

[1] Обратите внимание, что количество клеток n в диаграмме λ никак не связано с размерностью пространства V и может быть любым, однако некоторые пространства $\mathbb{S}^\lambda V$ при этом могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, с внешними степенями $\Lambda^n V$ при $n > \dim V$.

что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $\mathbb{S}^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, в которых каждый оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$, ими исчерпываются все такие конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, в которых элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f.

Упр. 5.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w+u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw, поскольку $fu \in U$.

Упр. 5.3. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют нетривиальный подмодуль в $\Bbbk[t]/(p^m)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 5.4. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t-\lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (5-2), делится на максимальную степень каждого элементарного делителя, все элементарные делители имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (5-2) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t.

Упр. 5.5. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 5.6. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 5.7. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R-подмодулем. Для любого R-подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение

$$S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$$

является R-подмодулем в S: если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет нетривиальных собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 5.8. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 5.9. (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; (г) фактически было доказано в упр. 5.7.

Упр. 5.12. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} \iota_\alpha \varphi_{\alpha\beta}\pi_\beta \circ \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu}\pi_\nu = \sum_{\alpha,\nu} \iota_\alpha p_{\alpha\nu}\pi_\nu$, where $p_{\alpha\nu} = \sum_\eta \varphi_{\alpha\eta}\psi_{\eta\nu}$, because

$$\pi_\beta \iota_\mu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{V_\eta} & \text{for } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Упр. 5.13. Из равенства $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V, т. е. A_R-орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V.

Упр. 5.17. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw)\,.$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 5.21. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu : G \to \Bbbk^*$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i\, \psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 5.31. Достаточно показать, что никакая ненулевая линейная форма $\varphi \in \mathrm{Sym}^n(W)^*$ не зануляется на всех тензорах $w^{\otimes n}$. Зафиксируем в W базис $e_1, \dots, e_d$. Пусть $w = \sum x_i e_i$, а φ переводит стандартный базисный вектор $e_{[m_1 m_2 \dots m_d]} \in \mathrm{Sym}^n(W)$ в число $a_{m_1 m_2 \dots m_d} \in \Bbbk$. Тогда $\varphi\left(w^{\otimes n}\right) = \sum_{m_1 m_2 \dots m_d} a_{m_1 m_2 \dots m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}$. Над бесконечным полем $\Bbbk$ такой многочлен тогда и только тогда является тождественно нулевой функцией от $x_1, \dots, x_n$, когда все его коэффициенты $a_{m_1 m_2 \dots m_d} = 0$.

Упр. 5.32. Пусть все тензоры вида $w^{\otimes n}$ с $F(w) \neq 0$ лежат в гиперплоскости $\mathrm{Ann}\,\psi$, где ψ — линейная форма на $\mathrm{Sym}^n(W)$. Функция $G(w) = \psi(w^{\otimes})$ является однородным многочленом степени n на W. По условию, многочлен $F \cdot G$ является тождественно нулевой функцией на W. Поэтому это нулевой многочлен, и так как $F \neq 0$, то $G = 0$, т. е. $\psi(w^{\otimes}) \equiv 0$ и *все* тензоры $w^{\otimes} \in \mathrm{Ann}\,\psi$, что противоречит принципу Аронгольда из упр. 5.31.