§3. Симметрические функции

3.1. Симметрические и кососимметрические многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ переставляя переменные:

$$\forall\, g \in S_n \quad gf(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)})\,. \tag{3-1}$$

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим* — если $gf = \operatorname{sgn}(g)\cdot f$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ подкольцо, а кососимметрические — модуль над этим кольцом[1]. При отождествлении кольца многочленов от n переменных с n-й тензорной степенью кольца многочленов от одной переменной при помощи канонического изоморфизма из прим. 1.2 на стр. 6:

$$\varkappa :\ \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[t]^{\otimes n}\,, \quad x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \mapsto t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \dots \otimes t^{m_n}\,, \tag{3-2}$$

(косо)симметрические многочлены превращаются в точности в (косо)симметричные тензоры, а умножение многочленов — в покомпонентное умножение

$$\left(f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n\right) \cdot \left(g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n\right) \overset{\text{def}}{=} (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2) \otimes \dots \otimes (f_n g_n)\,.$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что такое умножение наделяет $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes \dots \otimes 1$.

Описанные в n° 2.4.1 на стр. 22 и n° 2.4.2 на стр. 23 стандартные базисы в $\mathbb{Z}$-модулях симметричных тензоров $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и знакопеременных тензоров $\operatorname{Alt}^n(\mathbb{Z}[t])$ переносятся изоморфизмом (3-2) в базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые принято называть соответственно *мономиальным* и *детерминантным* базисами.

3.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов. Поскольку симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит с тем же самым коэффициентом и все мономы из его S_n-орбиты, а S_n-орбита любого монома однозначно определяется лексикографически старшим мономом в орбите, показатели которого не убывают слева направо, всякий симметрический многочлен единственным способом представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n})\,, \tag{3-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из n строк (часть из которых может быть нулевой длины). Многочлен (3-3) называется *мономиальным симметрическим многочленом*. При изоморфизме (3-2) он переходит в стандартный базисный симметрический тензор[2], равный сумме всех различных тензорных произведений, содержащих $m_0(\lambda)$ сомножителей $1 = t^0$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где через $m_i(\lambda)$ здесь и далее всегда обозначается количество строк длины i в диаграмме Юнга λ.

---

[1] Ибо при умножении кососимметрического многочлена на симметрический получается кососимметрический многочлен.

[2] См. n° 2.4.1 на стр. 22.

3.1.2. Детерминантные базисы. Так как при транспозиции любых двух переменных кососимметрический многочлен меняет свой знак, в каждом мономе такого многочлена степени всех переменных попарно различны. Поэтому базис $\mathbb{Z}$-модуля кососимметрических многочленов образуют альтернированные S_n-орбиты вида

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}\,, \tag{3-4}$$

занумерованные диаграммами Юнга ν из n строк строго убывающей длины

$$\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_n \geqslant 0\,.$$

Все такие диаграммы ν содержат в себе минимальную треугольную диаграмму

$$\delta = \big((n-1),\,(n-2),\,\ldots\,,\,1,\,0\big)$$

из n строк разной длины, и разности

$$\lambda = \nu - \delta \overset{\text{def}}{=} \big((\nu_1 - n + 1),\,(\nu_2 - n + 2),\,\ldots\,,\,(\nu_{n-1} - 1),\,\nu_n\big)$$

имеют $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и пробегают множество всех диаграмм Юнга из n строк безо всяких ограничений на их длины (которые могут быть и нулевыми). Часто бывает удобно нумеровать базис (3-4) именно такими диаграммами λ, и тогда мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν.

Легко усмотреть, что многочлен (3-4) представляет собою определитель[1]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

Упражнение 3.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (3-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)\,. \tag{3-6}$$

Упражнение 3.3. Убедитесь в справедливости равенства $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

[1] Здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ — какая-либо функция от i, j, означает матрицу, в i-й строке и j-м столбце которой стоит результат применения функции f к данным i и j.

3.1.3. Базис Шура. Поскольку любой кососимметрический многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$, и частное от деления $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

Предложение 3.1

Умножение на определитель Вандермонда Δ_δ задаёт биекцию между симметричными и кососимметричными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и в частности — $\mathbb{Z}$-модулей). □

Следствие 3.1

Многочлены[1] $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

3.2. Элементарные симметрические многочлены. Коэффициенты многочлена от t

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n][t] \tag{3-7}$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрыв скобки в (3-7), заключаем, что $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{3-8}$$

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены e_k возникают и в *формулах Виета*: если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)\,, \tag{3-9}$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

3.2.1. Разложение по мономиальному базису. Для диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ положим $e_\lambda \overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^{k} e_{\lambda_i}$. Это всего лишь другое обозначение для монома $e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$, показатель m_i которого равен количеству строк длины i в диаграмме λ, причём диаграмма Юнга λ и набор неотрицательных показателей $m = (m_1, \dots, m_n)$ взаимно однозначно определяются друг другом из равенства $e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$. Запись мономов от букв e_i в виде e_λ часто упрощает многие вычисления. Например, лексикографически старший по переменным $x_1, \dots, x_n$ мономом в симметрическом многочлене e_λ получается при перемножении монома $x_1 \dots x_{\lambda_1}$ из e_{λ_1}, монома $x_1 \dots x_{\lambda_2}$ из e_{λ_2} и т. д. вплоть до $x_1 \dots x_{\lambda_k}$ из e_{λ_k}. Его удобно представлять себе как результат перемножения переменных x_i, вписанных в клетки диаграммы Юнга λ так, что номер переменной совпадает с номером столбца, в котором она стоит. Моном от x, который получится в результате перемножения всех переменных из диаграммы λ, имеет вид $x_1^{\lambda_1^t} x_2^{\lambda_2^t} \dots x_n^{\lambda_n^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)$ — это диаграмма Юнга, транспонированная[2] к λ. Мы заключаем, что разложение многочлена e_λ по базису из мономиальных симметрических многочленов[3] m_λ имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \tag{3-10}$$

[1] Многочлены $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*.

[2] строками которой служат столбцы диаграммы λ, как при транспонировании матрицы.

[3] См. формулу (3-3) на стр. 36.

Предложение 3.2
Многочлены $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_m}$, где λ пробегает диаграммы Юнга из n столбцов (длины столбцов могут быть и нулевыми), образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Доказательство. Мономиальные многочлены m_μ из форм. (3-3) на стр. 36 нумеруются диаграммами Юнга из n строк (длины которых могут быть нулевыми). Выпишем их в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм μ. Многочлены e_λ, занумерованные диаграммами λ из n столбцов (длины которых также могут быть нулевыми), тоже выпишем в строку, но в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм λ^t. Формула (3-10) утверждает, что вторая строка получается из первой умножением справа на квадратную целочисленную верхнегортанную матрицу с единицами по главной диагонали. Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены e_λ также образуют базис. □

Следствие 3.2
Многочлены $e_1, \dots, e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство. Вспоминаем, что каждое произведение $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k}$ представляет собою моном $e^m \overset{\text{def}}{=} e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$, у которого показатель m_i равен количеству строк длины i в диаграмме λ, и что множество многочленов e_λ — это в точности множество всех различных мономов от $e_1, \dots, e_n$. □

Следствие 3.3
Всякий симметрический многочлен от корней приведённого многочлена $f(t)$ можно переписать как многочлен от коэффициентов f. □

3.3. Полные симметрические многочлены. Сумма всех мономов степени k в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ обозначается h_k и называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Он равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n][[t]]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий[1]

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \cdots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k . \tag{3-11}$$

Поэтому $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$(-1)^{k+1} h_k = e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} \tag{3-12}$$
$$(-1)^{k+1} e_k = h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 - \cdots + (-1)^{k-1} h_1 e_{k-1} . \tag{3-13}$$

Предложение 3.3
Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k (при $k = 1, \dots, n$) является инволютивным автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

[1] Выбирая в i-й скобке m_i-е слагаемое, получаем после их перемножения моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$.

Доказательство. Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, \dots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (3-12) и (3-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволютивной[1] биекцией. □

Следствие 3.4
Многочлены $h_1, \dots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, \dots, h_n$.

3.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \tag{3-14}$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$P(t) = \sum_{k\geqslant1} p_k(x)\, t^{k-1} = \sum_i \sum_{k\geqslant1} x_i^k\, t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k\geqslant1} x_i^k\, \frac{t^k}{k} =$$
$$= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i\, t) = \frac{d}{dt}\, \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i\, t} = \frac{d}{dt}\, \ln\, H(t) \tag{3-15}$$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1/E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах $H(t)P(t) = H'(t)$ и $E(-t)P(t) = E'(-t)$, получаем *формулы Ньютона*, рекурсивно выражающие p_k через h_k или через e_k:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \cdots - h_1 p_{k-1} \tag{3-16}$$
$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \cdots + (-1)^{k-1}e_1 p_{k-1}\,. \tag{3-17}$$

Индукция по k показывает, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 3.3 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1} p_k\,. \tag{3-18}$$

Следствие 3.5
Многочлены $p_1, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (3-17) вытекает, что при любом $N \in \mathbb{N}$ в пространстве многочленов степени $\leqslant N$ от $x_1, \dots, x_n$ с рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}$-линейная оболочка всевозможных мономов от $p_1, \dots, p_n$ совпадает с $\mathbb{Q}$-линейной оболочкой всевозможных мономов от $e_1, \dots, e_n$. Поскольку при фиксированном N количества этих мономов одинаковы и мономы от $e_1, \dots, e_n$ образуют базис, то и мономы от $p_1, \dots, p_n$ тоже образуют базис. В частности, они линейно независимы над $\mathbb{Q}$. □

[1] Т. е. обратной самой себе.

3.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Как и в n° 3.2.1 выше, для каждой диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, состоящей из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек[1] и т. д., положим

$$\begin{aligned} e_\lambda &\overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} e_{\lambda_3} \dots = e_1^{m_1} e_2^{m_2} e_3^{m_3} \dots \\ h_\lambda &\overset{\text{def}}{=} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} h_{\lambda_3} \dots = h_1^{m_1} h_2^{m_2} h_3^{m_3} \dots \\ p_\lambda &\overset{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \dots = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots \end{aligned} \tag{3-19}$$

и условимся более не различать между собою диаграммы λ, получающиеся друг из друга добавлением или удалением строк нулевой длины, т. е. приписыванием к $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ или удалением оттуда любого количества нулей справа. Таким образом, множество многочленов вида p_λ — это в точности множество всевозможных мономов[2] от формальных переменных p_i, и то же самое справедливо для многочленов e_λ и h_λ.

Многочлены p_λ являются собственными векторами инволюции ω из предл. 3.3 на стр. 39:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_\lambda = (-1)^{\sum (k-1) m_k} = (-1)^{|\lambda|} (-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum (\lambda_i - 1)}\,. \tag{3-20}$$

Далее, для каждой диаграммы Юнга λ обозначим через

$$z_\lambda \overset{\text{def}}{=} \prod_k \left(m_k! \cdot k^{m_k} \right) \tag{3-21}$$

порядок централизатора перестановки циклового типа[3] λ в симметрической группе $S_{|\lambda|}$.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что количество перестановок, коммутирующих с данной перестановкой циклового типа λ, действительно равно (3-21), и покажите, что в $S_{|\lambda|}$ имеется всего $|\lambda|!/z_\lambda$ перестановок циклового типа λ.

Предложение 3.4
Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda| = k} z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \quad e_k = \sum_{|\lambda| = k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \tag{3-22}$$

где суммирование ведётся по всем k-клеточным диаграммам Юнга.

Доказательство. Докажем левую формулу, правая получается из неё применением инволюции ω из предл. 3.3. Согласно форм. (3-15) на стр. 40,

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i / i} = \prod e^{p_i t^i / i} = \prod_{i \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 0} \frac{p_i^m}{i^m m!}\, t^{im}\,.$$

Если выбрать в i-м сомножителе m_i-е слагаемое, то их произведение даст вклад в коэффициент при t^k если и только если $\sum_i i \cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют k-клеточным диаграммам Юнга λ с m_1 строками длины 1, m_2 строками длины 2 и т. д., а вклад произведения, отвечающего такой диаграмме, равен p_λ / z_λ. □

[1] Отметим, что $\sum_k k \cdot m_k = |\lambda|$.

[2] Напомню, что переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычной нумерации показателями степеней — это переход от неубывающей последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ неотрицательных целых чисел к вектору $m(\lambda) = (m_1, \cdots, m_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами, у которого i-тая координата m_i равна количеству строк длины i в диаграмме λ.

[3] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_11.pdf, раздел 9.1.2 на стр. 150.

3.5. Формула Джамбелли выражает детерминантные многочленами Шура s_λ через полные симметрические многочлены h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Для её получения обозначим через

$$e_k^{(p)} = e_k^{(p)}(x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, x_n)\,,$$

симметрическую функцию от $(n-1)$ переменных[1], которая получается из элементарного симметрического многочлена $e_k = e_k(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой $x_p = 0$. При фиксированном p производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ имеет вид $E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x) \cdot t^k = \prod_{i\neq p}(1 + x_i t)$. Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем для каждого целого неотрицательного k соотношение

$$\begin{aligned} x_p^k &= h_{k-n+1} \cdot (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2} \cdot (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j} \cdot (-1)^{n-j} e_j^{(p)}\,, \end{aligned} \tag{3-23}$$

в правой части которого стоит произведение n-мерных строки $(h_{k-n+1}, \dots, h_k)$ и столбца

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для данных $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$ организуем h-строки, отвечающие $k = \nu_1, \dots, \nu_n$, в матрицу[2]

$$H_\nu = \left(h_{\nu_i - n + j}\right) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1-n+1} & h_{\nu_1-n+2} & \cdots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2-n+1} & h_{\nu_2-n+2} & \cdots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\nu_n-n+1} & h_{\nu_n-n+2} & \cdots & h_{\nu_n} \end{pmatrix},$$

а $e^{(p)}$-столбцы, отвечающие $p = 1, 2, \dots, n$, — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)}\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(1)} & (-1)^{n-1} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n)} \\ (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(1)} & (-1)^{n-2} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (3-23) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}.$$

[1] Как обычно, крышка над x_p означает пропуск этой переменной.

[2] В которой мы для унификации записи полагаем $h_j = 0$ при $j < 0$.

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M\,.$$

Так как при $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная, $\det H_\delta = 1$ и $\Delta_\delta = \det M$. Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta = (\det H_{\delta+\lambda} \cdot \det M)/\det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)\,. \tag{3-24}$$

Предложение 3.5 (формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det\begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \cdots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{3-25}$$

где по главной диагонали стоят h_{λ_1}, h_{λ_2}, …, h_{λ_n}, и в каждой строке индексы у h увеличиваются слева направо на единицу от клетки к клетке. □

3.5.1. Примеры. При $n = 2$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1h_2 - h_3 = e_1e_2 - e_3\,.$$

При $n = 3$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}\,,$$

дающее то же самое выражение $s_{(2,1)}$ через h_i, что и при $n = 2$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря $\lambda = (k)$, т. е. одну строку длины k, получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 3.5 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(k)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(k)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ не вполне очевидно.

3.6. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в n° 3.1. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$, а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в n° 3.1.2 показывает, что всякий кососимметричный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов:

$$A = \sum_{\nu_1>\nu_2>\dots>\nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu\,, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \,\cdots\, x_{g(n)}^{\nu_n}\,, \tag{3-26}$$

суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины, и коэффициенты $c_\nu \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3.1
Разложение (3-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена Δ_ν на симметрический ряд $H(x) = \prod_{i=1}^n (1-x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n (1+x_i+x_i^2+x_i^3+\cdots) = \sum_{k\geqslant 0} h_k(x)$ имеет вид $\Delta_\nu \cdot H = \sum\limits_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем таким $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, что

$$\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n\,.$$

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t), \dots, f_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ положим

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1(x_{g(1)}) \cdots f_n(x_{g(n)})\,.$$

Ряд $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ кососимметричен и полилинейно и кососимметрично зависит от $f_1, \dots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что $t^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$.

В этих обозначениях

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{i=1}^n x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$$

для $f_i(t) = t^{\nu_i}/(1-t) = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + t^{\nu_i+2} + \cdots$. Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из полученных многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, приходим к равенству $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n$, в котором $\overline{f}_1 = f_1 = \sum_{j\geqslant\nu_1} t^j$, а

$$\overline{f}_i = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + \cdots + t^{\nu_{i-1}-1} \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n\,.$$

В силу полилинейности $\overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n = \sum_\eta t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \ldots \wedge t^{\eta_n} = \sum_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n$. □

Следствие 3.6 (формула Пьери)
$s_\lambda \cdot h_k = \sum_\mu s_\mu$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 3.1 имеем равенство $\Delta_{\delta+\lambda} \sum_{k\geqslant 0} h_k = \sum_\tau \Delta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем таким диаграммам μ, что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$. Деля обе части на Δ_δ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. □

Замечание 3.1. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, т. е. $\lambda_i = 0$ при $i > k$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну ненулевую строку больше, чем λ. Например, при $n = 2$ получаем $s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)}$, что вновь приводит к выражению $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 3.5.1 на стр. 43.

[1] Напомним (см. n° 3.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$.

3.7. Кольцо симметрических функций. Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все нужные функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами $i \in \mathbb{N}$ букв q_i положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \dots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} \dots \,.$$

Мы пишем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ если диаграмма Юнга λ содержит m_i строк длины i при каждом $i \in \mathbb{N}$, что равносильно равенству $q_\lambda = q^m$. Для симметрических многочленов m_λ и s_λ мы полагаем $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме λ, а для элементарных симметрических многочленов e_λ мы полагаем $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ. При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ становится определён для переменной $x = (x_1, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_r = 0 \tag{3-27}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, \dots, x_s)$. Подстановка (3-27) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_s]\,. \tag{3-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов $f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *симметрической функцией степени* d, если выполняются следующие два условия:

$$1)\ \forall\, n \text{ многочлен } f^{(n)} \text{ однороден степени } d \qquad 2)\ \zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)} \text{ при } r > s.$$

Поскольку в выражении $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ верхний индекс у f равен числу подставляемых переменных, писать его не имеет смысла, и мы всегда будем сокращать предыдущую запись до

$$f(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Так, для фиксированной диаграммы λ веса $|\lambda| = d$ последовательность мономиальных многочленов $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ. Например, кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d. Произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 является симметрической функцией степени $d_1 d_2$, так что прямая сумма $\Lambda = \bigoplus_{d \geqslant 0} \Lambda_d$ является градуированным кольцом. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.3. Поскольку Δ_δ обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$. Так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в Δ_δ, заключаем, что частное равно 1.

Упр. 3.4. Разложим перестановку g циклового типа λ в произведение независимых циклов и запишем их по строкам диаграммы так, чтобы действие перестановки g циклически сдвигало все элементы вдоль строк на единицу влево. Сопряжение перестановки g перестановкой h состоит в замене содержимого клеток диаграммы по правилу $i \mapsto h(i)$. Стабилизатор g состоит из всех перестановок, независимо циклически сдвигающих номера вдоль строк и переставляющих строки одинаковой длины между собою как единое целое.

Упр. 3.5. В правом нижнем углу матрицы $\left(h_{\lambda_i + j - i}\right)$, начиная с позиции $(m+1, m+1)$, где m — высота диаграммы λ, будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевые.