§2. Тензорная алгебра

2.1. Тензорные степени. Рассмотрим произвольный модуль V над коммутативным кольцом K с единицей. Тензорное произведение n экземпляров этого модуля $V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \cdots \otimes V$ называется n-той *тензорной степенью* модуля V. Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} K$ и $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме $TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}$ структуру ассоциативной (некоммутативной) градуированной алгебры над K. Если модуль V свободен с базисом $E \subset V$, то моном $1 \in V^0$ и всевозможные тензорные мономы от базисных векторов

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_m\,, \quad e_i \in E\,,\ m \in \mathbb{N}\,, \tag{2-1}$$

составляют базис модуля TV над K по теор. 1.1 на стр. 6. Умножение мономов (2-1) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, моном 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса E в V позволяет отождествить алгебру TV с алгеброй многочленов от *некоммутирующих* друг с другом переменных $e \in E$. При этом компонента $V^{\otimes n} \subset TV$ отождествляется с модулем однородных многочленов степени n.

Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* модуля V или *свободной ассоциативной K-алгеброй*, порожденной V. Вложение $\iota : V \hookrightarrow TV$ в качестве подмодуля $V^{\otimes 1}$ обладает универсальным свойством, аналогичным универсальному свойству базиса в свободном модуле.

Предложение 2.1 (универсальное свойство тензорной алгебры)
Для любого K-линейного отображения $f : V \to A$ в произвольную ассоциативную K-алгебру A существует единственный такой гомоморфизм K-алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы K-алгебр $TV \to A$ находятся в канонической биекции с K-линейными отображениям $V \to A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм α должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in TV$$

в произведение $f(v_1)\cdots f(v_n) \in A$. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают алгебру TV, гомоморфизм α единствен, если существует. Так как для любого K-линейного отображения $f : V \to A$ произведение $f(v_1)\cdots f(v_n) \in A$ полилинейно по v_i, по лем. 1.3 на стр. 9 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение

$$\alpha_n : V^{\otimes n} \to A\,, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_n)\,.$$

Нужный нам гомоморфизм $\alpha : TV \to A$ переводит конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \to A$ переводит единицу в единицу. □

Упражнение 2.1. Убедитесь, что K-алгебра TV вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма K-алгебр, перестановочного с вложением ι.

2.2. Свёртки. Для двойственных векторных пространств V, V^* над полем $\Bbbk$ и пары разложимых тензоров одинаковой степени $t = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\vartheta = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, t\,,\, \vartheta\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) = \prod_{i=1}^{n} \langle\, v_i\,,\, \xi_i\,\rangle \in \Bbbk \tag{2-2}$$

называется *полной свёрткой* тензоров t и ϑ. Поскольку при каждом $\vartheta \in V^{*\otimes n}$ число (2-2) полилинейно по векторам v_i, существует единственный ковектор $c_\vartheta \in V^{\otimes n *}$

$$c_\vartheta : V^{\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \langle\, v_1 \otimes \dots \otimes v_n \,,\, \vartheta \,\rangle\,,$$

и этот ковектор полилинеен по сомножителям $\xi_1, \dots, \xi_n$ разложимого тензора ϑ. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \to V^{\otimes n *}\,, \quad \vartheta \mapsto c_\vartheta\,. \tag{2-3}$$

Иначе говоря, полная свёртка (2-2) корректно задаёт билинейное спаривание[1]

$$V^{\otimes n} \times V^{*\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad (t, \vartheta) \mapsto \langle\, t \,,\, \vartheta \,\rangle\,. \tag{2-4}$$

Предложение 2.2

Для конечномерного пространства V спаривание (2-4) совершенно, т. е. линейное отображение (2-3) является изоморфизмом.

Доказательство. Тензорные мономы $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ и $e^*_{i_1} \otimes \dots \otimes e^*_{i_n}$, составленные из векторов двойственных друг другу базисов в пространствах V и V^* образуют двойственные базисы в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$. □

Следствие 2.1

Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы

$$\xi : V \times \dots \times V \to \Bbbk\,, \quad \xi(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,,$$

задаёт для любого конечномерного пространства V изоморфизм

$$V^{*\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V;\, \Bbbk)\,. \tag{2-5}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения пространство $V^{\otimes n *}$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм (2-5) является композицией этого изоморфизма с изоморфизмом (2-3). □

2.2.1. Частичные свертки. Любая пара инъективных, но не обязательно монотонных отображений

$$\{1, 2, \,\dots\, p\} \xleftarrow{\;I\;} \{1, 2, \,\dots\, m\} \xrightarrow{\;J\;} \{1, 2, \,\dots\, q\}$$

задаёт два слова $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ одинаковой длины m, состоящие из неповторяющихся в пределах каждого слова индексов $i_\nu = I(\nu)$ и $j_\nu = J(\nu)$. Линейный оператор

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \;\to\; V^{*\otimes (p-m)} \otimes V^{\otimes (q-m)}\,, \\ \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \xi_i \;\otimes\; \bigotimes_{j \notin J} v_j\,, \end{gathered} \tag{2-6}$$

[1] См. раздел 7.2 части I

который для каждого $\nu = 1, \dots, m$ сворачивает i_ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с j_ν-м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$, оставляя все остальные тензорные сомножители в их первоначальном порядке, называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные пары отображений I, J могут приводить к *разным* отображениям свёртки даже в тех случаях, когда они имеют одинаковые пары образов и отличаются лишь упорядочением индексов внутри этих образов.

Пример 2.1 (свертка вектора с полилинейной формой)
Интерпретируем n-линейную форму $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ как тензор из $\varphi \in V^{*\otimes n}$ посредством изоморфизма из сл. 2.1. Свёртка формы φ с произвольно выбранным вектором $v \in V$ по первому тензорному сомножителю лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и может интерпретироваться как $(n-1)$-линейная форма на V. Эта форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Поскольку для разложимой формы $\varphi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ имеет место линейное по φ равенство

$$i_v\varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1}), \tag{2-7}$$

это равенство выполнено для всех полилинейных форм φ, т. е. внутреннее умножение формы на вектор означает фиксацию этого вектора в качестве первого аргумента формы.

2.2.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\operatorname{supp}(t) \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению или же по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех приведённых описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

Упражнение 2.2. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\operatorname{rk} t \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{supp}(t)$. Тензор t называется *вырожденным*, если его носитель $\operatorname{supp}(t) \subsetneq V$ имеет положительную коразмерность. Это означает, что некоммутативный многочлен t «эффективно зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа переменных, и при помощи линейной замены базиса можно убрать часть переменных из t. Например, если $\dim \operatorname{supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \Bbbk$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\operatorname{supp}(t)$ над $\Bbbk$ можно при помощи свёрток. Для любой последовательности $J = j_1, \dots, j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов[1] $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,\dots,(n-1)}_{j_1,\dots,j_{n-1}}(\xi \otimes t), \tag{2-8}$$

полную свёртку с тензором t, которая спаривает ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-м сомножителем тензора t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\operatorname{supp}(t)$.

Теорема 2.1
Пространство $\operatorname{supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-8).

Доказательство. Обозначим $\operatorname{supp}(t)$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (2-8), аннулирует подпространство W. Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует

[1] Подчеркнём, что индексы в последовательности не обязаны возрастать или убывать.

$t_J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$ для всех J. Выберем в V^* базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на W образуют базис в W^*. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(t_J(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}})\right)$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью[1] J. Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном[2] от базисных векторов w_i входит в разложение t. Подбирая надлежащие J, можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t. Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \mathrm{supp}(t)$ вопреки нашему выбору. □

2.3. Коммутативные и грассмановы многочлены. В некоммутативном кольце R бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Симметричным образом, $I \subset R$ называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Идеал $I \subset R$ называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый.

Иначе двусторонние идеалы можно охарактеризовать как ядра гомоморфизмов колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \to S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то на фактор группе R/I можно корректно задать умножение правилом $[a][b] \stackrel{\text{def}}{=} [ab]$.

Упражнение 2.3. Убедитесь в этом.

При этом аддитивный гомоморфизм фактризации $R \twoheadrightarrow R/I$ становится гомоморфизмом колец с ядром I. Из теоремы о строении гомоморфизма абелевых групп[3] вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ является композицией сюрьективного гомоморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi$ и вложения $R/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi \hookrightarrow S$.

Алгебры многочленов и грассмановых многочленов являются факторами тензорной алгебры по двусторонним идеалам, порождённым соотношениями *коммутирования* и *антикоммутирования*.

2.3.1. Симметрическая алгебра модуля. Рассмотрим в тензорной алгебре TV произвольного модуля V над коммутативным кольцом K двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \subset TV$, порождённый всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V\,. \tag{2-9}$$

Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая разности (2-9) с обеих сторон на любые элементы тензорной алгебры. Таким образом, пересечение $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\,\cdots \otimes v \otimes w \otimes \,\cdots) - (\,\cdots \otimes w \otimes v \otimes \,\cdots)\,,$$

где оба заключённых в скобки тензора разложимы и обозначенные многоточиями фрагменты у них одинаковы. Весь идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$ является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} = \bigoplus_{n\geqslant 2} \left(\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}\right)\,.$$

[1] Т. е. j_ν-й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ сворачивается с ξ_1.

[2] j_ν-й множитель этого монома равен w_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ равен w_1.

[3] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_02.pdf, предложение 2.1 на стр. 28.

Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* модуля V. Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую обычно опускают. Как K-модуль, симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Модуль $S^n V$ называется *n-й симметрической степенью* пространства V. Обратите внимание, что $S^0 V = K$ и $S^1 V = V$. Включение $\iota : V \hookrightarrow SV$ в качестве прямого слагаемого $S^1 V$ обладает следующим универсальным свойством.

Упражнение 2.4. Убедитесь, что для любого K-линейного отображения $f : V \to A$ из модуля V в произвольную коммутативную K-алгебру A имеется единственный такой гомоморфизм K-алгебр $\tilde{f} : SV \to A$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём SV и ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма K-алгебр.

По этой причине симметрическую алгебру SV иначе называют *свободной* коммутативной K-алгеброй с единицей, порождённой K-модулем V.

2.3.2. Симметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\varphi : V \times \cdots \times V \to U \tag{2-10}$$

называется *симметричным*, если $\varphi(v_{g_1}, \dots, v_{g_n}) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ для всех перестановок $g \in S_n$. Симметричные полилинейные отображения образуют K-подмодуль

$$\mathrm{Sym}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)$$

в модуле всех n-линейных отображений (2-10). Композиция фиксированного симметричного n-линейного отображения (2-10) с линейными отображениями $F : U \to W$ доставляет линейное по F отображение

$$\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Sym}^n(V, W)\,, \quad F \mapsto F \circ \varphi\,.$$

Если это отображение является изоморфизмом для всех модулей W, отображение φ называется *универсальным* симметричным n-линейным отображением или *коммутативным произведением* векторов.

Упражнение 2.5. Покажите, что модуль, в котором принимает значение коммутативное произведение, единствен с точностью до единственного перестановочного с этим произведением изоморфизма.

Предложение 2.3

Композиция $\sigma_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \cdots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ является универсальным симметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ однозначно представляется в виде композиции $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$ с линейным отображением $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$. Если φ симметрично, $\widetilde{F}$ аннулирует соотношения коммутативности (2-9): $\widetilde{F}\big((\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)\big) = \widetilde{F}(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - \widetilde{F}(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) = \varphi(\dots, v, w, \dots) - \varphi(\dots, w, v, \dots) = 0$, и значит, корректно факторизуется до линейного отображения $F\colon\ S^nV \to W$, $v_1 \dots v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots , v_n)$. Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{S^n} \circ \tau = F \circ \sigma_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F'\colon\ S^nV \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \sigma_n = F' \circ \pi_{S^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{S^n} = F \circ \pi_{S^n}$, влекущему равенство $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{S^n}. □

Следствие 2.2
Для любого[1] векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ пространство $\mathrm{Sym}^n(V, \Bbbk)$ симметричных n-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той симметрической степени S^nV.

Доказательство. Отправляя линейную форму $\xi\colon\ S^nV \to \Bbbk$ в её композицию с коммутативным умножением $\sigma_n\colon\ V \times \dots \times V \to S^nV$, мы получаем линейное отображение $(S^nV)^* \to \mathrm{Sym}^n(V, \Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства σ_n. □

Следствие 2.3
Если модуль V свободен с базисом $E \subset V$, то модуль S^nV тоже свободен, и коммутативные мономы $e^{\boldsymbol{m}} = \prod_{e\in E} e^{m(e)}$, занумерованные всевозможными функциями $\boldsymbol{m}\colon\ E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$, с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e\in E} m(e) = n$, составляют базис в S^nV. Иначе говоря, выбор базиса в V задаёт изоморфизм симметрической алгебры SV с алгеброй многочленов от базисных векторов, причём подмодуль S^nV переводится этим изоморфизмом в модуль однородных многочленов степени n.

Доказательство. Обозначим через U свободный K-модуль с базисом из мономов $e^{\boldsymbol{m}}$, которые мы будем воспринимать как формальные символы, и рассмотрим симметричное полилинейное отображение $\mu\colon\ V \times \dots \times V \to U$, значение которого на каждом наборе базисных векторов равно моному, в котором каждый базисный вектор представлен в степени, равной числу его вхождений в набор. Это отображение универсально, поскольку для симметричного полилинейного отображения $\varphi\colon\ V \times \dots \times V \to W$ и линейного ображения $F\colon\ U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \mu$ равносильно выполнению равенств

$$\varphi(\underbrace{e_1, \dots , e_1}_{m_1}, \dots , \underbrace{e_k, \dots , e_k}_{m_k}) = F(e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k}) \tag{2-11}$$

для всех конечных подмножеств $\{e_1, \dots , e_k\} \subset E$ и всех функций

$$m\colon\ \{e_1, \dots , e_k\} \to \mathbb{N}\,, \quad e_i \mapsto m_i\,,$$

с суммой значений $\sum_i m_i = n$, и равенства (2-11) однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По упр. 2.9 существует изоморфизм $U \simeq S^nV$, переводящий каждый базисный вектор $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k} \in U$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k} \in S^nV$. Стало быть, такие произведения образуют базис в S^nV. □

Упражнение 2.6. Найдите $\mathrm{rk}\, S^nV$ если $\mathrm{rk}\, V = d$.

[1] В том числе бесконечномерного.

2.3.3. Внешняя алгебра модуля. Обозначим через $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$ двусторонний идеал, порождённый тензорами квадратами

$$v \otimes v \in V \otimes V\,. \tag{2-12}$$

всевозможных векторов $v \in V$. Линейная оболочка тензоров (2-12) содержит также все суммы $u \otimes w + w \otimes u = (u + w) \otimes (u + w) - u \otimes u - w \otimes w$ и линейно порождается ими, если $1 + 1 \neq 0$ в K. Как модуль над K, идеал

$$\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 2} \mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$$

является прямой суммой однородных компонент $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$, каждая из которых является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots$ и содержит все суммы $(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) + (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)$, где оба слагаемых разложимы и обозначенные многоточиями фрагменты одинаковы.

Фактор алгебра $\Lambda V \overset{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{skew}}$ называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй K-модуля V. Умножение в ΛV, индуцированное тензорным произведением в TV, называется *внешним* или *грассмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как модуль над K, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент $\Lambda^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$, которые называются *внешними степенями* модуля V. При этом $\Lambda^0 V = K$, $\Lambda^1 V = V$ и $\Lambda^k V \wedge \Lambda^m V \subset \Lambda^{k+m} V$ для всех k, m. Из описания идеала $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ вытекает, что $u \wedge w = -w \wedge u$ для всех $u, w \in V$, и $v \wedge v = 0$ для всех $v \in V$. Перестановка сомножителей в составленном из векторов грассмановом мономе равносильна умножению этого монома на знак перестановки:

$$\forall\, g \in S_k \quad v_{g_1} \wedge v_{g_2} \wedge \ldots \wedge v_{g_k} = \operatorname{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k\,.$$

Поэтому для однородных элементов $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega\,.$$

Градуированные алгебры[1] с таким свойством называются *s-коммутативными*[2]. Отождествление V с $\Lambda^1 V$ задаёт вложение $\iota : V \hookrightarrow \Lambda V$, которое обладает следующим универсальным свойством.

Упражнение 2.7. Покажите, что для любого линейного отображения $f : V \to L$ в произвольную s-коммутативную K-алгебру L существует единственный такой гомоморфизм K-алгебр $\tilde{f} : \Lambda V \to L$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём алгебра ΛV и вложение ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма K-алгебр.

По этой причине алгебра ΛV иначе называется *свободной* s-коммутативной K-алгеброй, порождённой модулем V.

2.3.4. Кососимметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\alpha : V \times \cdots \times V \to U \tag{2-13}$$

называется *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение всякий раз, когда какие-либо два аргумента совпадают. Всякое кососимметричное полилинейное отображение *знакопеременно*, т. е. для всех $g \in S_n$

$$\alpha(v_{g(1)}, v_{g(2)}, \ldots, v_{g(m)}) = \operatorname{sgn} g \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

[1] K-алгебра A называется *градуированной*, если как модуль над K она распадается в прямую сумму $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A_k$, и $A_k A_m \subset A_{k+m}$ для всех k, m.

[2] Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.

Упражнение 2.8. Убедитесь в этом и покажите, что когда $1 + 1 \neq 0$ в K, знакопеременность равносильна кососимметричности.

Кососимметричные n-линейные отображения образуют подмодуль

$$\mathrm{Alt}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)$$

в K-модуле всех n-линейных отображений. Сопоставляя всевозможным линейным отображениям $F : U \to W$ их композицию $F \circ \alpha$ с фиксированным кососимметричным n-линейным отображением (2-13), мы получаем K-линейное отображение

$$\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Alt}^n(V, W)\,, \quad F \mapsto F \circ \alpha\,.$$

Если оно является изоморфизмом для всех K-модулей W, отображение α называется *универсальным* кососимметричным n-линейным отображением, а также *антикоммутативным* или *грассмановым* произведением векторов.

Упражнение 2.9. Покажите, что пространство, в котором принимает значение грассманово произведение, единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с этим произведением.

Предложение 2.4

Композиция $\alpha_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ является универсальным кососимметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсальности τ любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ однозначно представляется в виде композиции $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$, где $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$ линейно. Если φ кососимметрично, $\widetilde{F}$ аннулирует линейные порождающие подпространства $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n} = \ker \pi_{\Lambda^n}$:

$$\widetilde{F}(\,\cdots \otimes w \otimes w \otimes \cdots\,) = \varphi(\,\dots, w, w, \dots\,) = 0\,,$$

и значит, корректно факторизуется до линейного отображения

$$F : \Lambda^n V \to W\,, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n)\,.$$

Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau = F \circ \alpha_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : \Lambda^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \alpha_n = F' \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{\Lambda^n} = F \circ \pi_{\Lambda^n}$, откуда $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{Λ^n}. □

Упражнение 2.10. Убедитесь, что для любого (в том числе бесконечномерного) векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ пространство $\mathrm{Alt}^n(V, \Bbbk)$ кососимметричных n-линейных форм $V \times \dots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той внешней степени $\Lambda^n V$.

Следствие 2.4

Если K-модуль V свободен с базисом $E \subset V$, то при каждом m модуль $\Lambda^m V$ тоже свободен, и мономы $e_M = e_1 \wedge \dots \wedge e_m$, занумерованные всевозможными m-элементными подмножествами $M = \{e_1, \dots, e_m\} \subset E$, образуют базис в $\Lambda^m V$. При перестановке элементов множества M, моном e_M умножается на знак перестановки.

Доказательство. Рассмотрим свободный модуль U с базисом из символов e_M, где M пробегает m-элементные подмножества в E. В каждом таком подмножестве M мы произвольным образом занумеруем элементы, так что M запишется как $\{e_1, \dots, e_m\}$, и рассмотрим кососимметричное полилинейное отображение $\alpha : V \times \dots \times V \to U$, переводящее каждый упорядоченный набор из m различных базисных векторов, образующих перестановку $e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_m}$ элементов некоторого множества $M = \{e_1, \dots, e_m\} = \{e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_m}\} \subset E$, в вектор $\operatorname{sgn}(g) \cdot e_M$. Отображение α универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного отображения $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ и линейного отображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \alpha$ равносильно тому, что $F(e_{\{e_1,\dots,e_m\}}) = \operatorname{sgn}(g) \cdot \varphi(e_{g(1)}, \dots, e_{g(m)})$ для каждого m-элементного подмножества $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$ и всех перестановок $g \in S_m$, причём эти условия корректно и однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. Тем самым, имеется единственный изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий базисный вектор $e_{\{e_1,\dots,e_m\}} \in U$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \dots \wedge e_m \in \Lambda^n V$. □

Следствие 2.5

Если модуль V имеет конечный базис $e_1, \dots, e_d$, то $\operatorname{rk} \Lambda^m V = \binom{d}{m}$ для всех m, и мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant d. \tag{2-14}$$

составляют базис модуля $\Lambda^m V$ над K. В частности, $\Lambda^m V = 0$ при $m > d$, и $\operatorname{rk} \Lambda V = 2^d$.

Упражнение 2.11. В условиях сл. 2.5 покажите, что $\omega \in \Lambda U$ однороден степени $\operatorname{rk} U$ если и только если $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

2.4. Симметрические и кососимметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца §2 речь будет идти про векторные пространства над полем $\Bbbk$ характеристики нуль. Симметрическая группа S_n действует на тензорной степени $V^{\otimes n}$ такого векторного пространства V перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)}. \tag{2-15}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, формула (2-15) корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Подпространства

$$\operatorname{Sym}^n V \overset{\text{def}}{=} \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \ g(t) = t\}$$
$$\operatorname{Alt}^n V \overset{\text{def}}{=} \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \ g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t\}$$

называются пространствами *симметричных* и *знакопеременных* тензоров в $V^{\otimes n}$.

2.4.1. Стандартный базис пространства симметричных тензоров. Зафиксируем в пространстве V некоторый базис E, а $V^{\otimes n}$ — базис из тензорных мономов $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ с $e_i \in E$. В разложении произвольного симметричного тензора $t \in \operatorname{Sym}^n V$ по последнему базису все мономы, составляющие одну орбиту группы S_n, входят с одним и тем же коэффициентом, зависящим только от орбиты. Орбиты действия S_n на базисных мономах нумеруются функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$ с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e \in E} m(e) = n$. Орбита $E_{\boldsymbol{m}}$, отвечающая такой функции, состоит из всех тензорных мономов, в которые каждый вектор

$e \in E$ входит ровно $m(e)$ раз. Сумма всех мономов из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ обозначается $e_{\boldsymbol{m}}$ и называется *полным симметрическим тензором*. Таким образом, полные симметрические тензоры веса $|\boldsymbol{m}| \overset{\text{def}}{=} \sum_{e\in E} m(e) = n$ образуют базис пространства $\mathrm{Sym}^n(V)$.

Упражнение 2.12. Пусть функция $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ принимает ненулевые значения $m(e_i) = m_i$ только на базисных векторах $e_1, \dots, e_d$. Покажите, что орбита $E_{\boldsymbol{m}}$ состоит из

$$|E_{\boldsymbol{m}}| = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \, \cdots \, m_d!}$$

различных тензорных мономов.

2.4.2. Стандартный базис пространства знакопеременных тензоров. В разложении знакопеременного тензора $t \in \mathrm{Alt}^n V$ по базисным мономам тензорной алгебры присутствуют лишь мономы, в которых каждый базисный вектор $e \in E$ встречается не более одного раза, причём вместе с каждым таким мономом $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ в разложение t входят все $n!$ мономов

$$g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n} \,,$$

которые получаются из него перестановками $g \in S_n$, причём коэффициенты при $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ и $g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n)$ отличаются друг от друга множителем $\mathrm{sgn}(g)$. Таким образом, базис в пространстве $\mathrm{Alt}^n V$ составляют *полные знакопеременные тензоры*

$$e_I = \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n} \tag{2-16}$$

находящиеся в биекции с n-элементным подмножествам $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. При этом мы считаем, что на множестве E базисных векторов зафиксирован некоторый порядок, вводим индуцированный порядок на каждом конечном подмножестве $I \subset E$ и располагаем сомножители тензора $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, отвечающего тождественной перестановке в формуле (2-16), в порядке возрастания.

Предложение 2.5
Над полем характеристики нуль ограничение проекции $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ на подпространство $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств.

Доказательство. Для каждой функции $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с конечным носителем

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{m}) = \{e_1, \dots, e_k\}$$

и значениями $\boldsymbol{m}(e_i) = m_i$, все $\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ тензоров из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ отобразятся проекцией

$$\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$$

в один и тот же коммутативный моном $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k}$. Точно так же, для любого конечного подмножества $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ каждое из $n!$ слагаемых суммы (2-16), перейдёт при проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ в грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Тем самым, образы стандартных базисных симметричных и знакопеременных тензоров пропорциональны базисным коммутативным и грассмановым мономам:

$$\pi_{S^n}(e_{\boldsymbol{m}}) = \frac{n!}{m_1!m_2! \, \cdots \, m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k} \,, \tag{2-17}$$

$$\pi_{\Lambda^n}(e_I) = n! \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \,. \tag{2-18}$$

□

Предостережение 2.1. Не смотря на предл. 2.5, подпространства $\mathrm{Sym}^n V$ и $\mathrm{Alt}^n V$, которые лежат внутри $V^{\otimes n}$, не следует путать с фактор пространствами $S^n V$ и $\Lambda^n V$, которые получаются из $V^{\otimes n}$ отождествлением некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ многие симметричные тензоры и все кососимметричные тензоры, степень которых больше p, аннулируются проекциями π_{S^n} и π_{Λ^n}. Даже в характеристике нуль изоморфизмы из предл. 2.5 не отождествляют друг с другом стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств буквально, но выражают их друг через друга с поправочными комбинаторными множителями, которые приходится учитывать как при подъёме на пространства симметричных и знакопеременных тензоров тех умножений, что имеются в алгебрах многочленов SV и ΛV, так и при спуске на пространства многочленов тех операций свёртки, что имеются на тензорных алгебрах двойственных друг другу векторных пространств.

2.5. Поляризация коммутативных многочленов. Обратное к изоморфизму из предл. 2.5 отображение $\pi_{S^n}^{-1} : S^n V^* \xrightarrow{\sim} V^{*\otimes n}$ называется *полной поляризацией* многочленов. Оно сопоставляет однородному многочлену $f \in S^n V^*$ тот единственный симметричный тензор $\tilde f \in \mathrm{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации по соотношениям коммутирования. Тензор $\tilde f$ можно интерпретировать как симметричную n-линейную форму

$$\tilde f : V \times \cdots \times V \to \Bbbk , \quad \tilde f(v_1, \dots , v_n) \overset{\text{def}}{=} \langle\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \,,\, \tilde f \,\rangle .$$

Полной поляризацией базисного монома $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}$ степени $\sum_i m_i = n$ является симметрический тензор

$$\frac{m_1!\, m_2! \,\cdots\, m_k!}{n!} \cdot x_{\boldsymbol{m}} , \tag{2-19}$$

пропорциональный сумме всех тензорных мономов, состоящих из m_1 ковекторов x_1, m_2 ковекторов x_2, … , m_k ковекторов x_k. Полная поляризация произвольного многочлена может быть вычислена отсюда по линейности. Ниже, в n° 2.5.2 и в форм. (2-25) на стр. 27 мы приведём более явные рецепты для вычисления значения $\tilde f(v_1, \dots , v_n)$ в терминах многочлена f.

Упражнение 2.13. Убедитесь, что полная поляризация квадратичной формы $q \in S^2 V^*$ это в точности билинейная симметричная форма $\tilde f : V \times V \to \Bbbk$, определяемая соотношением $2\tilde f(u, w) = f(u + w) - f(u) - f(w)$, которая обсуждалась в первом семестре[1].

2.5.1. Вычисление значения многочлена на векторе. Сопоставим каждому многочлену $f \in S^n V^*$ *полиномиальную функцию*

$$f : V \to \Bbbk , \quad f(v) = \tilde f(v, \dots , v) , \tag{2-20}$$

где $\tilde f = \pi_{S^n}^{-1}(f) \in \mathrm{Sym}^n V^*$ это полная поляризация f. Обратите внимание, что это определение не зависит от выбора базиса и имеет смысл также и для бесконечномерных пространств V.

Для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \dots , e_d$ и двойственным базисом $x_1, \dots , x_d$ в V^* алгебра SV^* изоморфна алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, \dots , x_d]$, и для однородного полинома $f(x_1, \dots , x_d)$ степени n и вектора $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ значение (2-20) равно результату подстановки в f значений $x_i = \alpha_i$, т. е. $f(v) = f(\alpha_1, \dots , \alpha_d)$. Действительно, в силу линейности полной поляризации по f, достаточно проверить это равенство для $f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}$, и в этом случае полная свёртка

$$\langle\, \tilde f \,,\, v^{\otimes n} \,\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \,\cdots\, m_d!}{n!} \langle\, x_{\boldsymbol{m}} \,,\, v^{\otimes n} \,\rangle$$

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_14.pdf, раздел 14.3 на стр. 205.

является суммой $\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ одинаковых слагаемых, равных

$$\frac{m_1!m_2!\,\cdots\,m_d!}{n!}\langle\, x_1\,,\,v\,\rangle^{m_1}\langle\, x_2\,,\,v\,\rangle^{m_2}\cdots\langle\, x_k\,,\,v\,\rangle^{m_k}=\frac{m_1!m_2!\,\cdots\,m_d!}{n!}\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_d^{m_d}\,,$$

и совпадает с результатом подстановки $x_i=\alpha_i$ в этот моном. В качестве следствия мы заключаем, что результат подстановки в многочлен $f(x_1,\ldots,x_d)$ координат вектора v зависит только от $f\in SV$ и $v\in V$, но не от выбора пары двойственных друг другу базисов V и V^*, используемых для записи f в виде многочлена от координат и вычисления значений координат вектора v.

2.5.2. Комбинаторная формула для полной поляризации. Поскольку значение симметричной n-линейной формы не меняется при перестановках её аргументов, мы будем обозначать через $\tilde f\left(v_1^{m_1},\ldots,v_n^{m_k}\right)$ значение полной поляризации $\tilde f$ многочлена f на наборе векторов, содержащем $m_i\geqslant 0$ копий вектора v_i для каждого $i=1,\ldots,k$, так что $\sum_{i=1}^k m_i=\deg f=n$. В этих обозначениях, для всех $f\in S^nV^*$ и любых $v_1,\ldots,v_k\in V$ выполняется ровно та же мультиномиальная формула, что и при раскрытия скобок в выражении $(v_1+\cdots+v_k)^n$, а именно,

$$f(v_1+\cdots+v_k)=\tilde f\big((v_1+\cdots+v_k)^n\big)=\sum_{m_1,\ldots,m_k}\frac{n!}{m_1!\cdots m_k!}\cdot\tilde f\left(v_1^{m_1},\ldots,v_k^{m_k}\right)\,, \tag{2-21}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $m_1,\ldots,m_k$, что $0\leqslant m_i\leqslant n$ при каждом i и $m_1+\cdots+m_k=n$.

Упражнение 2.14. Убедитесь в этом.

Предложение 2.6
Значение полной поляризации любого однородного многочлена $f\in S^nV^*$ на (необязательно конечномерном) векторном пространстве V над полем характеристики нуль можно вычислять по формуле

$$n!\cdot\,\tilde f(v_1,\ldots,v_n)=\sum_{I\subsetneq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{\ell(I)}f\Big(\sum_{i\notin I}v_i\Big)\,, \tag{2-22}$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I\subsetneq\{1,\ldots,n\}$, включая пустое подмножество $I=\varnothing$, а $\ell(I)$ означает число элементов в I. Например, для $f\in S^3V^*$ получаем

$$6\,\tilde f(u,v,w)=f(u+v+w)-f(u+v)-f(u+w)-f(v+w)+f(u)+f(v)+f(w)\,.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (2-21) для $k=n$. Сумма в правой части формулы содержит ровно один член, зависящий от всех n векторов v_i, а именно, $n!\cdot\tilde f(v_1,\ldots,v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I\subsetneq\{1,\ldots,n\}$ не зависящие от векторов v_i с $i\in I$ слагаемые из правой части формулы (2-21) входят в неё ровно с тем же самым коэффициентом, что и в разложение (2-21) для $f\left(\sum_{i\notin I}v_i\right)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1+\cdots+v_n)$ подстановкой $v_i=0$ для всех $i\in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов v_i, могут быть удалены из (2-21) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт искомую формулу

$$n!\cdot\tilde f(v_1,\ldots,v_n)=f\big(\sum_\nu v_\nu\big)-\sum_{\{i\}}f\big(\sum_{\nu\ne i}v_\nu\big)+\sum_{\{i,j\}}f\big(\sum_{\nu\ne i,j}v_\nu\big)-\sum_{\{i,j,k\}}f\big(\sum_{\nu\ne i,j,k}v_\nu\big)+\,\cdots\,.$$

$\square$

2.5.3. Двойственность. Для конечномерного пространства V над полем характеристики нуль полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует невырожденное спаривание между пространствами $S^m V$ и $S^m V^*$, сопоставляющее многочленам $f \in S^n V$ и $g \in S^n V^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.15. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\langle\, e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d} \,\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-23}$$

2.5.4. Производная многочлена в направлении вектора. Внутреннее умножение[1] на фиксированный вектор $v \in V$ задаёт линейное отображение $i_v : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1} V^*$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^n V^* \to S^{n-1} V^*$, которое называется *поляризацией* вдоль v и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "\pi_{S^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{S^{n-1}}"] \\ S^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1} V^* \,. \end{tikzcd}$$

Поляризация переводит многочлен $f(x) = \tilde{f}(x^n) \in S^n V^*$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x^{n-1}) \in S^{n-1} V^*$, который называется *полярой* вектора v относительно f. При $n = 2$ мы получаем в точности полярное преобразование относительно проективной квадрики $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$, которое сопоставляет точке v её полярную гиперплоскость.

Рассмотрим двойственные базисы $e_1, \dots, e_d \in V$, $x_1, \dots, x_d \in V^*$ и базисный симметричный тензор[2] $x_{(m_1,\dots,m_d)} \in \mathrm{Sym}^n V^*$, равный сумме всех тензорных мономов, в которые каждый базисный ковектор x_ν входит ровно m_ν раз. Свёртка $x_{(m_1,\dots,m_d)}$ с базисным вектором $e_i \in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i = 0$, а во всех остальных случаях равна базисному симметричному тензору $x_{(m'_1,\dots,m'_d)} \in \mathrm{Sym}^{n-1} V^*$, имеющему $m'_i = m_i - 1$ и $m'_\nu = m_\nu$ при $\nu \neq i$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d} &= \frac{m_1! \cdots m_d!}{n!}\, \pi_{S^{n-1}} \left(x_{(m'_1,\dots,m'_d)} \right) = \\ &= \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}\,. \end{aligned}$$

Так как многочлен $\mathrm{pl}_v f$ билинейно зависит от v и f, поляра произвольного вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно любого однородного многочлена f равна разделённой на степень $\deg f$ *частной производной* от многочлена f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Обратите внимание, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в V и V^*. Из равенств

$$\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w f(v) = \tilde{f}\left(u, w, v^{n-1}\right) = \mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u f(v)$$

[1] См. прим. 2.1 на стр. 16.

[2] См. n° 2.4.1 на стр. 22.

вытекает, что частные производные коммутируют: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ для всех $u, w \in V$. Кроме того, для любых векторов $u, w \in V$, целых неотрицательных чисел k, m и многочлена $f \in S^{k+m}V^*$ выполняется равенство

$$k!\,\partial_u^k f(w) = (k+m)!\,\tilde{f}\left(u^k, w^m\right) = m!\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-24}$$

Наконец, мы получаем ещё одну формулу для полной поляризации:

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{v_1}\partial_{v_2}\,\dots\,\partial_{v_n} f \tag{2-25}$$

для любого многочлена $f \in S^n V^*$ и любых n векторов $v_1, \dots, v_n \in V$.

Упражнение 2.16. Докажите *правило Лейбница*: $\partial_v(fg) = g\partial_v(f) + f\partial_v(g)$.

Пример 2.2 (разложение Тейлора)
Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^n V^*$ по формуле бинома[1] получаем

$$f(u+w) = \tilde{f}\left((u+w)^n\right) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \tilde{f}(u^m, w^{n-m})\,.$$

Формула (2-24) позволяет переписать это равенство в виде *разложения Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-26}$$

Обратите внимание, что это *точное равенство* в $S^n V^*$, причём его правая часть *явно* симметрична по u и w в силу соотношений (2-24).

2.5.5. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S = V(f) \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным полиномиальным уравнением $f(x) = 0$ степени n. Пересечение гиперповерхности S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ удовлетворяет уравнению $f_{pq}(\lambda, \mu) = 0$, где $f_{pg}(\lambda, \mu) = f(\lambda p + \mu q) \in \Bbbk[\lambda, \mu]$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ однородный многочлен $f_{pq}(\lambda, \mu)$ либо тождественно нулевой, либо является произведением n линейных форм:

$$f(\lambda, \mu) = \prod_i (\alpha_i'' \lambda - \alpha_i' \mu)^{s_i} = \prod_i \det{}^{s_i} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_i' \\ \mu & \alpha_i'' \end{pmatrix}\,, \tag{2-27}$$

где $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'') \in \mathbb{P}_1$ суть различные нули многочлена f_{pq} на $\mathbb{P}_1$, и $\sum_i s_i = n$. Если $f_{pq} = 0$, то $(pq) \subset S$. Если $f_{pq} \neq 0$, пересечение $\ell \cap S$ состоит из точек $a_i = \alpha_i' p + \alpha_i'' q$. Показатель s_i, с которым линейная форма $\alpha_i'' \mu - \alpha_i' \lambda$ входит в разложение (2-27), называется локальной *кратностью пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Суммарное количество точек пересечения, учтённых каждая со своей кратностью, равно степени гиперповерхности. Если $(S, \ell)_{a_i} = 1$, пересечение S с ℓ в точке a_i называется *простым* или *трансверсальным*. Если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$, то прямая ℓ называется *касательной* к гиперповерхности S в точке a.

Таким образом, прямая (pq) касается гиперповерхности S в точке $p \in S$ если и только если полином $f(p + tq) \in \Bbbk[t]$ имеет кратный корень в нуле или тождественно нулевой. По формуле

[1] См. формулу (2-21) на стр. 25.

Тейлора[1] $f(p+tq) = t\binom{d}{1}\tilde f(p^{n-1},q) + t^2\binom{d}{2}\tilde f(p^{n-2},q^2) + \cdots$. Стало быть, прямая $\ell = (pq)$ касается S в точке $p \in S$ если и только если $\tilde f(p^{n-1},q) = 0$. Это обобщает обсуждавшееся в курсе геометрии[2] описание касательных прямых к проективной квадрике.

Если $f(p^{n-1},x)$ не является тождественно нулевой линейной формой от x, то точки q, удовлетворяющие уравнению $f(p^{n-1},q) = 0$, образуют в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, которая называется *касательным пространством* к S в точке $p \in S$ и обозначается T_pS. В этом случае точка p называется *гладкой* точкой гиперповерхности S. Сама гиперповерхность S называется *гладкой*, если гладки все её точки.

Если линейная по x форма $f(p^{n-1},x)$ нулевая, гиперповерхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* гиперповерхности S. Коэффициентами линейной формы $\tilde f\left(p^{n-1},x\right) = \partial_x f(p)$ являются частные производные многочлена f, вычисленные в точке p. Таким образом, точка p особа если и только если $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ при всех i. В этом случае любая проходящая через p прямая касается S в p, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех касающихся S в точке p прямых, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Для лежащей на гиперповерхности S гладкой точки q или произвольной точки q вне S полярный к q относительно f многочлен $\mathrm{pl}_q f(x) = \tilde f(q, x^{n-1})$ имеет по x степень $n-1$ и отличен от нуля, поскольку иначе нулевой будет и его производная $\partial_q^{n-2}\mathrm{pl}_q f(x) = \tilde f(q^{n-1},x)$, а это значит, что $q \in S$ и является особой точкой S. Множество нулей полинома $\mathrm{pl}_q f$ в $\mathbb{P}(V)$ обозначается

$$\mathrm{pl}_q S \overset{\text{def}}{=} V(\mathrm{pl}_q f) = \{x \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde f(q, x^{n-1}) = 0\} \tag{2-28}$$

и называется *полярной гиперповерхностью* точки q относительно S. Пересечение $S \cap \mathrm{pl}_q S$ состоит из точек касания с гиперповерхностью S всевозможных касательных, опущенных на неё из q, и называется *видимым контуром* гиперповерхности S из точки q. Для квадрик эта конструкция подробно обсуждалась в курсе геометрии[3].

Более общим образом, *полярой степени* r точки q относительно S называется гиперповерхность

$$\mathrm{pl}_q^{n-r} S \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde f(q^{n-r}, x^r) = 0\}.$$

Если q является гладкой точкой на S, то поляра степени 1 это касательная гиперплоскость T_qS. При $r \geqslant 2$ поляра степени r представляет собою такую проходящую через q гиперповерхность степени r, относительно которой q имеет точно такие же поляры степени меньше r, что и относительно исходной гиперповерхности S. Например, квадратичная поляра это квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S. Кубическая поляра это кубика, имеющая в q те же квадратичную поляру и касательную гиперплоскость, что S, и т. д.

2.5.6. Линейный носитель многочлена. Линейный носитель[4] $\mathrm{supp}(\tilde f) \subset V^*$ полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f \in S^nV^*$ называется *линейным носителем многочлена* f. Обратите внимание, что линейный носитель является векторным подпространством в V^*, а не в V.

Упражнение 2.17. Убедитесь, что каждый многочлен f корректно задаёт полиномиальную функцию на $V/\mathrm{Ann}\big(\mathrm{supp}(f)\big)$ по правилу $f([v]) = f(v)$.

---

[1] См. прим. 2.2 на стр. 27.

[2] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_17.pdf, раздел 17.3.1 на стр. 212.

[3] См. ссылку выше и http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf, раздел 19.1 на стр. 237.

[4] См. n° 2.2.2 на стр. 16.

Согласно теор. 2.1 на стр. 16, подпространство $\operatorname{supp}(f) \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\tilde{f}$, причём из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ эта свёртка не зависит от выбора индексов, по которым она производится. Иначе говоря, $\operatorname{supp}(f)$ линейно порождается всеми частными производными порядка $n-1$ от f:

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x), \quad \text{где} \quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-29}$$

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-29) вносит лишь тот коэффициент многочлена f, что стоит при $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Записывая многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{n!}{\nu_1! \cdots \nu_d!}\, a_{\nu_1 \dots \nu_d}\, x_1^{\nu_1} \cdots x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-30}$$

мы получаем для линейной формы (2-29) следующее выражение:

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1} \dots m_d} x_i\,, \tag{2-31}$$

и всего таких линейных форм имеется[1] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Предложение 2.7

Однородный многочлен f вида (2-30) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (2-31) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (2-31) и получаются друг из друга умножением на корни n-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\operatorname{supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ. В этом случае все формы (2-31) пропорциональны форме φ, и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (2-31) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\operatorname{supp}(f) = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda \psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 2.3 (бинарные формы ранга 1)

Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ если и только если $a_i : a_{i+1} = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от i, что равносильно условию

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,, \tag{2-32}$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j+1} = a_{i+1} a_j$ на коэффициенты f.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что столбцы матрицы (2-32) суть делённые на $n!$ коэффициенты n линейных форм $\frac{\partial^k}{\partial x_0^k} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} f$, где $k + m = n - 1$.

[1] Это количество разложений числа $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, \dots, m_d$.

2.6. Поляризация грассмановых многочленов. Согласно предл. 2.5, над полем нулевой характеристики факторизация антисимметричных по соотношениям антикоммутирования

$$\pi_{\Lambda^n} : \ \mathrm{Alt}^n V \to \Lambda^n V$$

является изоморфизмом. Обратный изоморфизм $\pi_{\Lambda^n}^{-1} : \Lambda^n V \simeq \mathrm{Alt}^n V$, как и в коммутативном случае, называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов[1]. Он сопоставляет полиному $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе ω по модулю подпространства[2] $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}$. Тензор $\widetilde{\omega}$ можно воспринимать как кососимметричную n-линейную форму $\widetilde{\omega} : V^* \times \dots \times V^* \to \Bbbk$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \langle \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n , \widetilde{\omega} \rangle$. Полная поляризация базисного грассманова монома $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ по форм. (2-18) на стр. 23 равна

$$\frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot e_{g_1} \wedge e_{g_2} \wedge \dots \wedge e_{g_n} .$$

Поляризация произвольного грассманова многочлена может быть получена отсюда по линейности.

2.6.1. Двойственность. Для двойственных конечномерных векторных пространств V, V^* над полем характеристики нуль полная свёртка $\langle \widetilde{\omega} , \tilde{\xi} \rangle \in \Bbbk$ полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V$, $\tilde{\xi} \in \mathrm{Alt}^n V^*$ однородных грассмановых многочленов $\omega \in \Lambda^n V$, $\xi \in \Lambda^n V^*$ задаёт невырожденное спаривание между пространствами $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$. Грассмановы мономы, составленные из векторов e_i и e_i^* двойственных друг другу базисов в V и V^* спариваются при этом по правилу

$$\langle e_{i_1} \wedge \dots e_{i_n} , e^*_{j_1} \wedge \dots e^*_{j_n} \rangle = \begin{cases} \mathrm{sgn}(g)/n! & \text{если } \exists\, g \in S_n : \forall\, \nu \ i_\nu = j_{g(\nu)} \\ 0 & \text{в остальных случаях} . \end{cases}$$

Упражнение 2.19. Убедитесь в этом.

2.6.2. Грассмановы производные. Как и для обычных многочленов, определим отображение *поляризации* грассмановых многочленов вдоль ковектора $\xi \in V^*$

$$\mathrm{pl}_\xi \overset{\text{def}}{=} \pi_{\Lambda^{n-1}} \circ i_\xi \circ \pi_{\Lambda^n}^{-1} : \Lambda^n V \to \Lambda^{n-1} V , \tag{2-33}$$

которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1} V$ внутреннего произведения[3] $i_\xi \widetilde{\omega}$ ковектора ξ и полной поляризации $\widetilde{\omega}$ многочлена ω. Отображение (2-33) вписывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Alt}^n V^* \arrow[r, "i_\xi"] \arrow[d, "\pi_{\Lambda^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{\Lambda^{n-1}}"] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_\xi"] & \Lambda^{n-1} V^* . \end{tikzcd}$$

[1] Для удобства дальнейшего использования мы рассматриваем здесь грассмановы многочлены от базисных векторов самого пространства V, а не двойственного пространства V^*, как это было в предыдущем разделе.

[2] См. n° 2.3.3 на стр. 20.

[3] Т. е. свёртки ξ с ω по первому тензорному сомножителю, см. прим. 2.1 на стр. 16.

Назовём *грассмановой производной* однородного грассманова многочлена ω в направлении ковектора $\xi \in V^*$ грассманов многочлен $\partial_\xi \omega \overset{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_\xi \omega$. Так как тензор $\widetilde{\omega}$ кососимметричен, для любых ξ, η, $\psi_1, \dots, \psi_{n-2} \in V^*$ выполняется равенство

$$i_\xi i_\eta \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = \omega\left(\xi, \eta, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -\omega\left(\eta, \xi, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -i_\eta i_\xi \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) .$$

Поэтому и грассмановы поляризации, и грассмановы производные антикоммутируют:

$$\mathrm{pl}_\xi \mathrm{pl}_\eta = -\mathrm{pl}_\eta \mathrm{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi \partial_\eta = -\partial_\eta \partial_\xi ,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае[1], выполняется равенство

$$\widetilde{\omega}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{n!} \partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} \dots \partial_{\xi_n} \omega . \tag{2-34}$$

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств V и V^*, то в силу билинейной зависимости $\mathrm{pl}_\xi \omega$ от ξ и ω, грассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i \, \partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i} \omega$ будет лишь от входящих в ω мономов e_J с $J \ni i$.

Упражнение 2.20. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ для любой[2] последовательности попарно разных индексов $i_1, \dots, i_n$.

Таким образом, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial / \partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу анткоммутативности грассмановых переменных, дифференцирование по k-той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1} \partial / \partial_{e_{i_k}}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} &= \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \dots e_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \dots e_{i_n} . \end{aligned}$$

Иначе говоря, грассмановы производные удовлетворяют *грассманову правилу Лейбница*: для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi (\omega \wedge \eta) = \partial_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_\xi(\eta) . \tag{2-35}$$

Упражнение 2.21. Докажите формулу (2-35).

2.6.3. Линейный носитель грассманова многочлена. Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\mathrm{supp}(\omega) \subset V$ однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель[3] $\mathrm{supp}(\widetilde{\omega})$ его полной поляризации $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$.

Упражнение 2.22. Убедитесь, что $\mathrm{supp}(\omega) \subset V$ является пересечением всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и стало быть, является наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности.

[1] Ср. с 2-25 на стр. 27

[2] Не обязательно возрастающей.

[3] См. n° 2.2.2 на стр. 16.

Согласно теор. 2.1 на стр. 16, подпространство $\operatorname{supp}(\omega) = \operatorname{supp}(\widetilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_\omega : V^{*\otimes(n-1)} \to V$ с тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по любым[1] его $n-1$ тензорным сомножителям, т. е. линейно порождается векторами $\partial_J\omega \overset{\text{def}}{=} \partial_{x_{j_1}} \dots \partial_{x_{j_{n-1}}} \omega$, где $J = j_1 \dots j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ не повторяющихся[2] натуральных чисел $1 \leqslant j_\nu \leqslant d$. Запишем ω в виде суммы

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 \dots i_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \tag{2-36}$$

где $I = i_1 \dots i_n$ пробегает все последовательности из n неповторяющихся индексов, а коэффициенты $\alpha_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \dots, i_n$. Вклад в $\partial_J\omega$ дают лишь те слагаемые $a_I e_I$, у которых $I \supset J$. С точностью до общего знака,

$$\partial_J\omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 \dots j_{n-1} i}\, e_i \,. \tag{2-37}$$

Предложение 2.8

Следующие три условия на грассманов многочлен (2-36) эквивалентны:

1) $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, \dots, u_n \in V$

2) $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in \operatorname{supp}(\omega)$

3) для всех наборов $i_1 \dots i_{m+1}$ и $j_1 \dots j_{m-1}$, состоящих, соответственно, из $n+1$ и $n-1$ неповторяющихся в каждом из наборов индексов, выполнены *соотношения Плюккера*

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0\,, \tag{2-38}$$

где «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить.

Доказательство. Условие (1) означает, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \operatorname{supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp}(\omega)$. Согласно упр. 2.11 на стр. 22 последнее равносильно условию (2). Соотношение (2-38) представляет собою координатную запись условия (2) на вектор $u = \partial_{j_1 \dots j_{m-1}}\omega$ из формулы (2-37) и констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\left(\partial_{j_1 \dots j_{m-1}}\omega\right) \wedge \omega$. Поскольку такие векторы u линейно порождают пространство $\operatorname{supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Пример 2.4 (квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$)

Для четырёхмерного пространства V с базисом $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ запись квадратичного многочлена $\omega \in \Lambda^2 V$ в виде (2-36) выглядит как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где коэффициенты a_{ij} образуют кососимметричную матрицу размера 4×4. Соотношение Плюккера для наборов $(i_1, i_2, i_3) = (2, 3, 4)$ и $j_1 = 1$ имеет вид

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0\,. \tag{2-39}$$

[1] В силу знакопеременности тензора $\widetilde{\omega}$ изменение последовательности сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

[2] В силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленно этого не делаем, чтобы упростить предстоящие далее вычисления.

Любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и $j_1 \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ приводит к тому же самому квадратичному соотношению (2-39).

Упражнение 2.23. Проверьте это.

Если же взять $j_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$, то получится тривиальное соотношение $0 = 0$, поскольку в каждом из произведений $a_{ij}a_{km}$ будет сомножитель вида $a_{nn} = 0$. Таким образом, множество разложимых в произведение двух линейных множителей грассмановых квадратичных форм от четырёх переменных описывается уравнением (2-39), которое задаёт гладкую квадрику в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Упражнение 2.24. Убедитесь, что соотношение (2-39) на грассманову квадратичную форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 \Bbbk^4$ равносильно условию $\omega \wedge \omega = 0$.

Пример 2.5 (разложимые квадратичые формы)
Пусть $\dim V = n$. Всякая грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ раскладывается по базисным мономам как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где числа $a_{ij} \in \Bbbk$ образуют кососимметричную $n \times n$ матрицу A, являющуюся матрицей Грама билинейной формы $\widetilde{\omega} : V^* \times V^* \to \Bbbk$ в двойственном базисе пространства V^*.

Упражнение 2.25. Убедитесь в этом.

В базисе $e_1, \dots, e_d$, который двойствен к такому базису пространства V^*, где матрица Грама кососимметричной билинейной формы $\widetilde{\omega}$ имеет блочный диагональный вид из 2×2 блоков[1] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, форма ω приобретает вид $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если в этой сумме ровно одно слагаемое, то форма $\omega = e_1 \wedge e_2$ разложима, и $\omega \wedge \omega = 0$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \dots \neq 0$, и стало быть, форма ω не представляется в виде $u \wedge w$ ни для каких $u, w \in V$. Таким образом, грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ разложима в произведение двух линейных форм если и только если $\omega \wedge \omega = 0$. При $\dim V = 4$ и $\dim \Lambda^4 V = 1$ условие $\omega \wedge \omega = 0$ на форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ записывается одним квадратичным соотношением (2-39), констатирующим обнуление коэффициента при $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в $\omega \wedge \omega$.

2.6.4. Грассманианы. Множество m-мерных векторных подпространств в векторном пространстве V обозначается $\mathrm{Gr}(m, V)$ и называется *грассманианом* m-мерных подпространств в V. Если $V = \Bbbk^d$ или природа пространства V несущественна, мы пишем $\mathrm{Gr}(m, d)$ вместо $\mathrm{Gr}(m, V)$, где $d = \dim V$. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *отображением Плюккера*

$$p_m : \mathrm{Gr}(m, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U \subset \Lambda^m V, \tag{2-40}$$

которое сопоставляет каждому m-мерному подпространству $U \subset V$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ составляют базис в U, то с точностью до ненулевого постоянного множителя $p_m(U) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m$.

Упражнение 2.26. Убедитесь, что отображение (2-40) инъективно.

Образ плюккерова вложения (2-40) состоит из ненулевых грассмановых полиномов $\omega \in \Lambda^m V$, полностью разложимых в произведение m линейных множителей, т. е. имеющих линейный носитель минимально возможной размерности $\dim \mathrm{supp}\omega = \deg \omega = m$. Такие полиномы называются *разложимыми*. По предл. 2.8, классы пропорциональности таких полиномов составля-

[1] См. раздел n° 16.5.2 части I.

ют в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ алгебраическое многообразие, задаваемое плюккеровыми квадратичными соотношениями (2-38).

2.6.5. Однородные и плюккеровы координаты. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ является прямым обобщением проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1, n+1)$. Векторное подпространство $U \subset V$ размерности m в координатном пространстве $V = \Bbbk^d$ можно задавать $m \times d$ матрицей $X_{\boldsymbol{u}}$, в m строках которой стоят координаты векторов некоторого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ пространства U в стандартном базисе $e_1, \dots, e_d$ пространства $\Bbbk^d$. При выборе в подпространстве U другого базиса $(w_1, \dots, w_m) = (u_1, \dots, u_m) \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $C_{\boldsymbol{uw}} \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ обозначает (обратимую) матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{w}$ к базису $\boldsymbol{u}$, матрица $X_{\boldsymbol{u}}$ заменится матрицей $X_{\boldsymbol{w}} = C^t_{\boldsymbol{uw}} X_{\boldsymbol{u}}$.

Упражнение 2.27. Убедитесь в этом.

Таким образом, подпространству $U \subset V$ взаимно однозначно соответствует всех множество $m \times d$ матриц ранга m, образующих одну орбиту действия группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_{m\times d}(\Bbbk)$ левыми умножениями, т. е. грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ представлет сбою множество $m \times d$ матриц ранга m, рассматриваемых с точностью до умножения слева на произвольные обратимые $m \times m$ матрицы. При $m = 1$ мы получаем строки $(x_1, \dots, x_d) \in \mathrm{Mat}_{1\times d} = \Bbbk^d$, рассматриваемые с точностью до умножения на ненулевые константы $\lambda \in \mathrm{GL}_1(\Bbbk) = \Bbbk^*$, т. е. в точности однородные координаты на $\mathbb{P}_{d-1} = \mathrm{Gr}(1,d)$. Поэтому по аналогии с проективным пространством мы будем называть матрицу $X_{\boldsymbol{u}}$, отвечающую базису $\boldsymbol{u}$ подпространства U, *матрицей однородных координат* точки $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$. Подчеркнём ещё раз, что матрица однородных координат определена лишь с точностью до умножения слева на произвольные матрицы из $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$.

Упражнение 2.28. Убедитесь, что каждый коэффициент $x_{i_1\dots i_n}$ в разложении

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_m = \sum_{i_1<\dots<i_m} x_{i_1\dots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$$

равен $m \times m$ минору матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, расположенному в столбцах $i_1, \dots, i_m$.

Набор рассматриваемых с точностью до пропорциональности $m \times m$ миноров $x_{i_1\dots i_n}$ матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, т. е. набор однородных координат плюккерова образа $p_m(U) \in \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ подпространства $U \subset V$, называется *плюккеровыми координатами* точки $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$.

2.6.6. Многообразие Сегре как сечение грассманиана. Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, в которой $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ при всех i и $\sum_\nu m_\nu = k$, обозначим через $W_{m_1\dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех тех грассмановых мономов $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$, у которых для каждого i ровно m_i из сомножителей w_ν лежит в V_i.

Упражнение 2.29. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1\dots m_n}$ и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1,\dots,m_n} W_{m_1\dots m_n} \simeq \bigoplus_{m_1,\dots,m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \,. \tag{2-41}$$

В частности, тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически изоморфно прямому слагаемому $W_{1\dots 1} \subset \Lambda^n W$ разложения (2-41). Этот изоморфизм переводит разложимые тензоры $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$

в грассмановы мономы $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$. Таким образом, многообразие Сегре прим. 1.3 на стр. 6 представляет собою сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}\left(W_{1\ldots1}\right) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ и является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым ограничениями квадратичных соотношений из предл. 2.8 на стр. 32 на линейное подпространство $W_{1\ldots1} \subset \Lambda^n W$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. То, что SV и ι однозначно определяются своим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.2. Выберем базис E в $U \cap W$, дополним его множествами E' и E'' до базисов в U и W соответственно, и зафиксируем в V базис вида $E \sqcup E' \sqcup E'' \sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в E, и стало быть, совпадает с $(U \cap W)^{\otimes n}$.

Упр. 2.3. Для любых $x, y \in I$ произведение $(a+x)(b+y) = ab + (ay + xb + xy) \cong ab \pmod I$. Обратите внимание, что для только левых или только правых идеалов это может быть неверно.

Упр. 2.4. Каждое линейное отображение $f : V \to A$ в коммутативную K-алгебру A однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : TV \to A$ по формуле $\tilde{f}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u, w \in V$, гомоморфизм $\tilde{f}$ аннулирует все разности $u \otimes w - w \otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV \twoheadrightarrow T/\mathcal{J}_{\mathrm{sym}} \simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что SV и ι однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.5. Дословно те же аргументы, что и для тензорного произведения, см. лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.6. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$. Это число решений уравнения $m_1 + \dots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, \dots, m_d$.

Упр. 2.7. Модифицируйте решение упр. 2.4.

Упр. 2.8. Форма α меняет знак при транспозиции любых двух аргументов, поскольку

$$0 = \alpha(\dots, (v+w), \dots, (v+w), \dots) = \alpha(\dots, v, \dots, w, \dots) + \alpha(\dots, w, \dots, v, \dots).$$

Упр. 2.9. Дословно те же аргументы, что и в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.10. Отправляя линейную форму $\xi : \Lambda^n V \to \Bbbk$ в её композицию с антикоммутативным умножением $\alpha_n : V \times \dots \times V \to \Lambda^n V$, мы получаем линейное отображение $(\Lambda^n V)^* \to \mathrm{Alt}^n(V, \Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства α_n.

Упр. 2.11. Фиксируем в U базис $e_1, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора, скажем, e_j. Тогда $e_j \wedge \omega \neq 0$, ибо содержит ненулевой моном $e_{j \sqcup I}$. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$, и $e_i \wedge \omega = 0$ для всех i, а значит, $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Упр. 2.12. Стабилизатор каждого монома из обиты $E_{\boldsymbol{m}}$ в группе S_n состоит из $m_1!\, m_2! \cdots m_k!$ независимых перестановок одинаковых тензорных сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.14. Используйте те же аргументы, что и в примере 1.2 из части I.

Упр. 2.16. Так как утверждение линейно по v, f, g, его достаточно проверить для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$.

Упр. 2.21. Аналогично упр. 2.16.

Упр. 2.22. Сначала убедитесь, что $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$ для любых подпространств $U, W \subset V$.

Упр. 2.25. Каждый моном $e_i \wedge e_j$ поляризуется в билинейную форму

$$\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) : V^* \times V^* \to \Bbbk, \quad (x_k, x_m) \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{при } k = i, m = j \\ -1/2 & \text{при } k = j, m = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

поэтому каждая пара слагаемых $a_{ij}\left(e_i \wedge e_j - e_i \wedge e_j\right)$, где $i < j$, поляризуется в квадратичную форму, матрица Грама которой имеет a_{ij} и $-a_{ij}$, соответственно, в клетках (i,j) и (j,i), и нули в остальных местах.

Упр. 2.26. Пусть $U_1 \neq U_2$. Выберем в базис в $U_1 \cap U_2$, дополним его до базисов в U_1, U_2, и включим все эти векторы в некоторый базис пространства V. Тогда $\Lambda^k U_1$ и $\Lambda^k U_2$ будут порождаться различными базисными мономами пространства $\Lambda^k V$.

Упр. 2.27. По условию, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{w}}^t$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{u}}^t$, $\boldsymbol{w} = u \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ суть строки из базисных векторов в V и U. Следовательно, $X_{\boldsymbol{w}}^t = X_{\boldsymbol{u}}^t C_{\boldsymbol{uw}}$.

Упр. 2.28. См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_08.pdf, раздел 8.4.2 на стр. 118.