## §1. Тензорные произведения

**1.1. Полилинейные отображения.** Рассмотрим над произвольным коммутативным кольцом $K$ набор модулей $V_1, \dots, V_n$ и ещё один модуль $W$. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi( \dots , \lambda v' + \mu v'' , \dots ) = \lambda \, \varphi( \dots , v' , \dots ) + \mu \, \varphi( \dots , v'' , \dots ) .$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ суть просто линейные отображения, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ — это билинейные формы на модуле $V$. Полилинейные отображения (1-1) можно складывать и умножать на элементы из кольца $K$, так что они тоже образуют $K$-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, \dots , V_n; W)$ или $\mathrm{Hom}_K(V_1, \dots , V_n; W)$, если важно явно указать кольцо.

Пример 1.1 (полилинейные отображения свободных модулей)
Если все модули $V_i$ и $W$ свободны с базисами $E_i \subset V_i$ и $E \subset W$, то модуль $\mathrm{Hom}(V_1, \dots , V_n; W)$ тоже свободен, и его базис равномощен $E \times E_1 \times \dots \times E_n$. В частности, если все модули имеют конечный ранг, то

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Hom}(V_1, \dots , V_n; W) = \mathrm{rk}\, W \cdot \prod_i \mathrm{rk}\, V_i \, .$$

В самом деле, полилинейное отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями $\varphi(e_1, \dots , e_n) \in W$ на всевозможных сочетаниях базисных векторов $(e_1, \dots , e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, ибо для произвольных $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$

$$\varphi(v_1, \dots , v_n) = \sum\nolimits_{(e_1,\dots,e_n)\in E_1\times\dots\times E_n} x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_n} \varphi(e_1, \dots , e_n) \, .$$

Запишем разложения векторов $\varphi(e_1, \dots , e_n)$ по базису $E \subset W$ как

$$\varphi(e_1, \dots , e_n) = \sum_{e\in E} a^{e}_{e_1,e_2,\dots,e_n} e$$

и сопоставим полилинейному отображению $\varphi$ набор чисел $a^{e}_{e_1,e_2,\dots,e_n} \in K$, организованный в $(n+1)$-мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества[2] $E \times E_1 \times \dots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \dots , v_n) = \sum\nolimits_{(e,e_1,\dots,e_n)\in E\times E_1\times\dots\times E_n} x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_n} a^{e}_{e_1,e_2,\dots,e_n} e \, .$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа из $K$ соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем $K$-линейный изоморфизм между модулем полилинейных отображений и

[1] Или $n$-*линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов.

[2] При $n = 1$ получается обычная двумерная матрица линейного отображения $V \to W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства $W$, а столбцы — базисным векторам пространства $V$.

свободным модулем многомерных матриц. При этом изоморфизме стандартная базисная матрица, имеющая единицу в позиции $(\varepsilon,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ и нули в остальных местах, переходит в полилинейное отображение $\delta_\varepsilon^{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n} : (v_1, \dots, v_n) \mapsto x_{\varepsilon_1} x_{\varepsilon_2} \dots x_{\varepsilon_n} \cdot \varepsilon$, значения которого на базисных векторах суть

$$\delta_\varepsilon^{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n}(e_1, \dots, e_n) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } (e_1, \dots, e_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-2}$$

**1.1.1. Универсальное полилинейное отображение.** Для любых модулей $V_1, \dots, V_n, U, W$ над произвольным коммутативным кольцом $K$ взятие композиции всевозможных $K$-линейных отображений $F : U \to W$ с произвольно зафиксированным полилинейным отображением

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to U \tag{1-3}$$

задаёт $K$-линейное по $F$ отображение модулей

$$\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W), \quad F \mapsto F \circ \tau\,. \tag{1-4}$$

Определение 1.1

Полилинейное отображение (1-3) называется *универсальным*, если для каждого $K$-модуля $W$ линейный оператор (1-4) является изоморфизмом. Иначе говоря, полилинейное отображение $\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to U$ универсально, если для любого модуля $W$ и любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to W$ существует единственный такой линейный оператор $F : U \to W$, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times \dots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & W
\end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1

Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times \dots \times V_n \to U_1 \qquad \text{и} \qquad \tau_2 : V_1 \times \dots \times V_n \to U_2$$

имеется единственный линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, такой что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности $\tau_1$ и $\tau_2$ существуют единственные такие линейные отображения $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, что $\tau_2 = F_{21}\tau_1$ и $\tau_1 = F_{12}\tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\
 & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times \dots \times V_n \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2\,.
\end{tikzcd}$$

Равенства $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

**1.2. Тензорное произведение модулей.** Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается

$$\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \,. \tag{1-5}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* модулей $V_1, \dots , V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов обычно записывают в виде

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} \tau(v_1, \dots , v_n)\,. \tag{1-6}$$

Они составляют образ универсального отображения (1-5) и называются *разложимыми* тензорами. Так как отображение (1-5) не линейно, а полилинейно, его образ, вообще говоря, не является $K$ подмодулем, и наугад взятая линейная комбинация мономов (1-6) скорее всего не разложится в тензорное произведение $n$ векторов.

**1.2.1. Существование тензорного произведения.** Предыдущее определение обеспечивает единственность универсального полилинейного отображения, но не даёт никаких гарантий его существования. Сейчас мы построим модуль $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ в терминах образующих и соотношений. Ниже, в теор. 1.1 на стр. 6 и теор. 1.2 на стр. 12 мы укажем, как упростить эту конструкцию для свободных модулей и для модулей, заданных образующими и соотношениями.

Рассмотрим свободный $K$-модуль $\mathcal{V}$, базисом в котором по определению являются всевозможные $n$-буквенные слова $[v_1 v_2 \, \dots \, v_n]$, в которых в качестве $i$-той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. В этом огромном модуле рассмотрим подмодуль $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\,\cdots\,(\lambda u + \mu w)\,\cdots\,] - \lambda\,[\,\cdots\,u\,\cdots\,] - \mu\,[\,\cdots\,w\,\cdots\,]\,, \tag{1-7}$$

где обозначенные многоточиями соответственные фрагменты во всех трёх словах одинаковы. Положим по определению

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}\,, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1 \dots v_n] \,(\mathrm{mod}\ \mathcal{R})\,. \tag{1-8}$$

Иными словами, модуль $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ состоит из конечных $K$-линейных комбинаций формальных тензорных мономов $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются стандартным соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то такое произведение можно преобразовать по обычному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\,\cdots \otimes u \otimes \cdots\,) + \mu \cdot (\,\cdots \otimes w \otimes \cdots\,)\,. \tag{1-9}$$

Лемма 1.2

Отображение $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathcal{V}/\mathcal{R}$, $(v_1, \dots , v_n) \mapsto [v_1 \dots v_n] \,(\mathrm{mod}\ \mathcal{R})$, является универсальным полилинейным отображением.

Доказательство. Полилинейность тавтологически следует из наложенных соотношений и выражается в точности формулой (1-9). Проверим универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F: \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 \dots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-7) из полилинейности $\varphi$ и линейности $F$ получаем

$$\begin{aligned} &F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots] - \lambda[\dots u \dots] - \mu[\dots w \dots]\big) = \\ &\qquad = F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots]\big) - \lambda F\big([\dots u \dots]\big) - \mu F\big([\dots w \dots]\big) = \\ &\qquad\qquad = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda\varphi(\dots, u, \dots) - \mu\varphi(\dots, w, \dots) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие 1.1
Разложимые тензоры $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ линейно порождают модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ над $K$.

Доказательство. Поскольку слова $[v_1 \dots v_n]$ линейно порождают $\mathcal{V}$, их образы $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ при факторизации $\mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{R}$ линейно порождают фактор модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R}$. □

Теорема 1.1
Если каждый из модулей $V_i$ свободен с базисом $E_i \subset V_i$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_n, \quad e_i \in E_i. \tag{1-10}$$

В частности, если $\operatorname{rk} V_i = |E_i| < \infty$ для всех $i$, то $\operatorname{rk} V_1 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из выражений (1-10), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau: V_1 \times \dots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (1-10) модуля $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для полилинейного $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \to W$ и линейного $F: \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n)$, которые однозначно определяют $F$, если дано $\varphi$, и наоборот. По лем. 1.1 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \dots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (1-10) модуля $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Пример 1.2 (многочлены)
Обратите внимание, что теор. 1.1 верна и для свободных модулей *бесконечного* ранга. Например, тензорное произведение $n$ экземпляров модуля многочленов $K[x] \otimes \dots \otimes K[x]$ изоморфно модулю многочленов от $n$ переменных $K[x_1, \dots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes x^{m_2} \otimes \dots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$.

Пример 1.3 (многообразия Сегре)
Тензорное произведение $\tau: V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ конечномерных векторных пространств $V_i$ над полем $\Bbbk$ задаёт отображение $s: \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m$ из произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes \dots \otimes V_n\right)$. Это отображение

называется *вложением Сегре*. Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Упражнение 1.1. Проверьте, что это определение корректно[1] и задаёт инъективное отображение.

Образ вложения Сегре состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. По построению, многообразие Сегре заметается $n$ семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$. Его размерность $\sum m_i$ обычно гораздо меньше размерности $m = \prod(m_i+1)-1$ объемлющего пространства. При этом многообразие Сегре не содержится ни в какой гиперплоскости, поскольку линейная оболочка множества разложимых тензоров совпадает со всем пространством $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

**1.2.2. Линейные операторы как тензоры.** Для произвольных векторных пространств $U, W$ имеется билинейное отображение $W \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, W)$, переводящее пару $(w, \xi) \in W \times U^*$ в линейный оператор

$$U \to W\,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w\,, \tag{1-11}$$

с ядром $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ и образом, порождённым вектором $w$. При ненулевых $\xi, w$ оператор (1-11) имеет ранг 1. Поскольку образ любого оператора $F : U \to W$ ранга 1 порождается некоторым ненулевым вектором $w \in W$, который определяется по $F$ однозначно с точностью до пропорциональности, значение такого оператора на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$ для некоторого $\xi \in \mathrm{Ann}\ker F \subset U^*$, однозначно определяемого по $F$ и $w$. Поэтому, переходя к проективизациям, мы получаем корректно определённое *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big)\,,$$

образ которого состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \to W$ ранга 1. В силу универсального свойства тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$W \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-12}$$

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (1-11). Если пространства $U$ и $W$ конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то $mn$ разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ это двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства $U^*$, образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (1-12) переводит тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \to W\,, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

матрица которого в выбранных базисах имеет единицу в пересечении $i$-той строки с $j$-тым столбцом и нули в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения $W \otimes U^*$ переводится в стандартный базис пространства операторов, т. е. отображение (1-12) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\mathrm{Hom}(U, W)$ при помощи изоморфизма (1-12) и обозначать оператор (1-11) через $w \otimes \xi$.

[1] Т. е. тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов $v_i$ на пропорциональные.

Если записывать операторы $U \to W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \ \dots \ : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задастся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

Пример 1.4 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $U = W = \Bbbk^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и обсуждавшейся в курсе геометрии[1] квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, точками которой являются ненулевые матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с $ad - bc = 0$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Эта биекция переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_1 y_0 \\ x_0 y_1 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] $= (x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] $= (y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.2. Докажите все эти геометрические утверждения.

**1.2.3. Тензорные произведения абелевых групп.** Для произвольных модулей над коммутативным кольцом строение модуля $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ отнюдь не очевидно из описанных в n° 1.2 образующих и соотношений. В этом разделе мы вычислим, исходя из определения, тензорные произведения некоторых конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей. В общем виде ответ будет получен в прим. 1.6 на стр. 13 при помощи более совершенной техники.

Покажем сначала, что $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) = 0$ при взаимно простых $m$ и $n$. Так как класс $[n] = n \pmod m$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/(m)$, каждый элемент $a \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $a = na'$, где $a' = [n]^{-1}a$. С другой стороны, для всех $b \in \mathbb{Z}/(n)$ произведение $nb = 0$ в $\mathbb{Z}/(n)$. Поэтому

$$a \otimes b = (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \alpha' \otimes 0 = \alpha' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha' \otimes 0) = 0$$

для любого разложимого тензора $a \otimes b \in \mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$. Поскольку такие тензоры линейно порождают $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$ над $\mathbb{Z}$, этот модуль нулевой.

Теперь покажем, что $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m) \simeq \mathbb{Z}/(p^n)$ при $n \leqslant m$. Отображение

$$\mu : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to \mathbb{Z}/(p^n)\,, \quad \left([a]_{p^n}, [b]_{p^m}\right) \mapsto [ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}\,,$$

[1] См. раздел 19.4.1 на стр. 246 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf.

корректно определено и $\mathbb{Z}$-билинейно. Достаточно проверить, что оно универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to W$ выполняется соотношение

$$\varphi\left([a]_{p^n}, [b]_{p^m}\right) = ab \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) .$$

Поэтому $\mathbb{Z}$-линейное отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$ удовлетворяет равенству $F \circ \mu = \varphi$ если и только если оно переводит образующую $e = [1]_{p^n}$ модуля $\mathbb{Z}/(p^n)$ в элемент $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) \in W$. Это правило однозначно задаёт $F$ при условии, что оно корректно, т. е. $\lambda e = 0$ в $\mathbb{Z}/(p^n)$ влечёт $\lambda\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = 0$ в $W$. Все линейные соотношения $\lambda e = 0$ на образующую $e$ вытекают из соотношения $p^n e = 0$, которому элемент $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ тоже удовлетворяет:

$$p^n \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(0, [1]_{p^m}\right) = 0 .$$

Поэтому $\mathbb{Z}$-линейное отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, $e \mapsto \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$, существует.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что отображение $\tau : \mathbb{Z} \times A \to A$, $(n, a) \mapsto na$, билинейно и универсально для любого $\mathbb{Z}$-модуля $A$, откуда $\mathbb{Z} \otimes A = A$.

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к рассмотренным трём случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых в следующем разделе.

**1.3. Канонические изоморфизмы.** Всюду далее речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом $K$. Линейные отображения $f : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать $f$ на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в модуле $W$. Поскольку все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (1-9) на стр. 5, мы получаем следующий полезный критерий.

Лемма 1.3
Линейное отображение $f : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \ldots, v_n) \in W$ полилинейно зависят[1] от векторов $v_i \in V_i$. □

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по $u$, $w$, оно по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратно предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. □

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

[1] Т. е. линейны по каждому $v_i$ при фиксированных остальных.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от $(v, u, w)$, существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от $u$ и $w$. Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \to V \otimes U \otimes W\,, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w\,,$$

которое само по себе линейно зависит от $v$. Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W\,, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w\,.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

Предложение 1.3

Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V)\,,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \to (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)\,, \quad v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)\,, \tag{1-14}$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по $v$ и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$\begin{aligned} f_1 &: V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0)\,, \\ f_2 &: V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w)\,, \end{aligned}$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad a \dotplus b \mapsto f_1(a) + f_2(b)\,,$$

очевидно, линейное и обратное к (1-14). □

**1.4. Тензорное произведение линейных отображений.** Для любого набора $K$-линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над коммутативным кольцом $K$, тензор

$$f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

полилинейно зависит от векторов $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$\begin{gathered} f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n\,, \\ u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n)\,. \end{gathered}$$

Оно называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 1.5 (кронекерово произведение матриц)
Рассмотрим векторные пространства $U$ и $W$ с базисами $u_1, \dots, u_n \in U$ и $w_1, \dots, w_m \in W$. Если линейные операторы $f : U \to U$ и $g : W \to W$ имеют в этих базисах матрицы $F = (\varphi_{ij})$ и $G = (\gamma_{k\ell})$, то матрица оператора $f \otimes g : U \otimes W \to U \otimes W$ в базисе из тензоров $u_j \otimes w_\ell$ имеет размеры $(mn) \times (mn)$, а её элементы естественно нумеруются упорядоченными парами $(\alpha, \beta)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$. Эта матрица называется *кронекеровым произведением* матриц $F$, $G$ и обозначается $F \otimes G$. Поскольку

$$f \otimes g\,(u_j \otimes w_\ell) = \Big(\sum_i u_i \varphi_{ij}\Big) \otimes \Big(\sum_k w_k \gamma_{k\ell}\Big) = \sum_{i,k} \varphi_{ij}\gamma_{k\ell} \cdot u_i \otimes w_k\,,$$

в пересечении $(i,k)$-ой строки и $(j,\ell)$-го столбца матрицы $F \otimes G$ стоит произведение $\varphi_{ij}\gamma_{k\ell}$. В лексикографически упорядоченном базисе

$$u_1 \otimes w_1,\ \dots\ ,\ u_1 \otimes w_m,\ u_2 \otimes w_1,\ \dots\ ,\ u_2 \otimes w_m,\ \dots\ , u_n \otimes w_1,\ \dots\ ,\ u_n \otimes w_m$$

матрица $F \otimes G$ имеет блочный вид и состоит из $n^2$ блоков размера $m \times m$, каждый из которых пропорционален матрице $G$:

$$F \otimes G = (\varphi_{ij}) \otimes (\gamma_{k\ell}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}G & \varphi_{12}G & \cdots & \varphi_{1n}G \\ \varphi_{21}G & \varphi_{22}G & \cdots & \varphi_{2n}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}G & \varphi_{n2}G & \cdots & \varphi_{nn}G \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.4
Если гомоморфизм $K$-модулей $f : U \twoheadrightarrow W$ сюрьективен, то для любого $K$-модуля $V$, гомоморфизм $\mathrm{Id}_V \otimes f : V \otimes U \to V \otimes W$ тоже сюрьективен.

Доказательство. Образ отображения $f \otimes \mathrm{Id}_V$ содержит все разложимые тензоры $v \otimes w \in V \otimes W$. □

Упражнение 1.4. Убедитесь, что для любого $K$-модуля $V$ имеется канонический изоморфизм $K \otimes V \xrightarrow{\sim} V$, $\lambda \otimes u \mapsto \lambda u$.

Лемма 1.5
Если ненулевой $K$-модуль $F$ свободен, то для любого инъективного гомоморфизма $K$-модулей $f : U \hookrightarrow W$ гомоморфизм $\mathrm{Id}_F \otimes f : F \otimes U \to F \otimes W$ тоже инъективен.

Доказательство. Если $F \simeq K$ имеет ранг 1, изоморфизмы из упр. 1.4

$$K \otimes U \xrightarrow{\sim} U\,, \quad \lambda \otimes u \mapsto \lambda u\,,$$
$$K \otimes W \xrightarrow{\sim} W\,, \quad \mu \otimes w \mapsto \mu w\,,$$

отождествляют отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f : K \otimes U \to K \otimes W$ с исходным отображением $f : U \to W$, инъективным по условию. Произвольный свободный модуль с базисом $E$ является прямой суммой $F \simeq \bigoplus_{e \in E} Ke$ свободных модулей ранга 1, занумерованных базисными векторами $e \in E$. По предл. 1.3 и упр. 1.4 модули

$$\begin{aligned} F \otimes U &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes U) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} U_e \\ F \otimes W &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes W) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} W_e \end{aligned} \tag{1-15}$$

являются прямыми суммами занумерованных базисными векторами $e \in E$ одинаковых копий $U_e \overset{\text{def}}{=} Ke \otimes U \simeq U$ и $W_e \overset{\text{def}}{=} Ke \otimes W \simeq W$ модулей $U, W$, причём изоморфизмы (1-15) отождествляют линейное отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f$ с диагональным отображением $\bigoplus_{e\in E} U_e \to \bigoplus_{e \in E} U_e$, переводящим последовательность векторов $\left(u_e\right)_{e\in E}$ в последовательность векторов $\left(f(u_e)\right)_{e\in E}$. При инъективном $f$ такое отображение тоже инъективно. □

Предостережение 1.1. Если модуль $V$ не свободен, тензорное произведение

$$\mathrm{Id}_V \otimes f : V \otimes U \to V \otimes W$$

может оказаться не инъективным даже для вложения $f : U \hookrightarrow W$ свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$, при тензорном умножении на тождественный эндоморфизм модуля $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в нулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)$, $[1]_2 \mapsto [0]_2$.

**1.5. Тензорное произведение модулей, заданных образующими и соотношениями.** Напомню[1], что если $K$-модуль $V$ линейно порождается над $K$ векторами $v_1, \dots, v_n$, то он изоморфен фактору $K^n / R_v$ свободного модуля $K^n$ по подмодулю $R_v \subset K^n$ линейных соотношений между образующими $v_i$, который состоит из всех таких строк $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, что $\sum x_i e_i = 0$ в $V$. Следующая далее теор. 1.2 описывает тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ двух представленных таким способом $K$-модулей $V_1 \simeq F_1 / R_1$ и $V_2 \simeq F_2 / R_2$ как фактор свободного модуля $F_1 \otimes F_2$ по подмодулю соотношений, устроенному следующим образом. По лем. 1.5 вложения $\iota_1 : R_1 \hookrightarrow F_1$ и $\iota_2 : R_2 \hookrightarrow F_2$ задают вложения $\iota_1 \otimes \mathrm{Id}_{F_2} : R_1 \otimes F_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$ и $\mathrm{Id}_{F_1} \otimes \iota_2 : F_1 \otimes R_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$, позволяющие рассматривать тензорные произведения $R_1 \otimes F_2$ и $F_1 \otimes R_2$ как подмодули свободного модуля $F \otimes G$. Искомый модуль соотношений является линейной оболочкой этих двух подмодулей и обозначается $R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$.

Теорема 1.2
$\left(F_1/R_1\right) \otimes \left(F_1/R_1\right) \simeq \left(F_1 \otimes F_2\right) / \left(R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2\right)$ для любых свободных модулей $F_1, F_2$ над произвольным коммутативным кольцом $K$ и любых их подмодулей $R_1 \subset F_1$, $R_2 \subset F_2$.

Доказательство. Положим $V_1 = F_1/R_1$, $V_2 = F_2/R_2$, $S = R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$. Для любых $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ класс $[f_1 \otimes f_2]_S = f_1 \otimes f_2 \pmod S \in \left(F_1 \otimes F_2\right)/S$ зависит только от классов $[f_1]_{R_1} = f_1 \pmod{R_1} \in V_1$ и $[f_2]_{R_2} = f_2 \pmod{R_2} \in V_2$, так как для всех $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$

$$(f_1 + r_1) \otimes (f_2 + r_2) = f_1 \otimes f_2 + \left(r_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes r_2\right) \equiv f_1 \otimes f_2 \pmod S .$$

Поэтому корректно определено билинейное отображение

$$\overline{\tau} : V_1 \times V_2 \to \left(F_1 \otimes F_2\right)/S , \quad ([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}) \mapsto [f_1 \otimes f_2]_S , \tag{1-16}$$

включающееся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1 \times \pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \left(F_1 \otimes F_2\right)/S
\end{tikzcd}$$

[1] См. пример 6.12 на стр. 87 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_06.pdf.

где через $\tau : F_1 \times F_2 \to F_1 \otimes F_2$ обозначено универсальное билинейное отображение, а

$$\pi_1 : F_1 \twoheadrightarrow V_1 , \quad \pi_2 : F_2 \twoheadrightarrow V_2 , \quad \pi : F_1 \otimes F_2 \twoheadrightarrow (F_1 \otimes F_2)/S$$

суть линейные проекции на факторы. Покажем, что отображение (1-16) универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \to W$ композиция

$$\varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) : F_1 \times F_2 \to W , \quad (f_1, f_2) \mapsto \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right) ,$$

тоже билинейна. Поэтому существует единственное такое линейное отображение

$$\psi : F_1 \otimes F_2 \to W ,$$

что $\psi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$, т. е. мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "\psi"] & \\ V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \left(F_1 \otimes F_2\right)/S \arrow[dr, "\overline{\psi}"] & \\ & & W . \end{tikzcd} \tag{1-17}$$

Поскольку для всех $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ выполняется равенство $\psi(f_1 \otimes f_2) = \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right)$, отображение $\psi$ аннулирует оба линейно порождающих $S$ подмодуля $R_1 \otimes F_2, F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$ и факторизуется до линейного отображения $\overline{\psi} : \left(F_1 \otimes F_2\right)/S \to W$, удовлетворяющего соотношению $\overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Поэтому $\overline{\psi} \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Так как проекция $\pi_1 \times \pi_2$ сюрьективна, $\varphi = \overline{\psi} \circ \overline{\tau}$. Остаётся проверить, что любое линейное отображение $\eta : \left(F_1 \otimes F_2\right)/S \to W$, удовлетворяющее соотношению $\varphi = \eta \circ \overline{\tau}$, совпадает с $\overline{\psi}$. Поскольку

$$\eta \circ \pi \circ \tau = \eta \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau ,$$

универсальное свойство отображения $\tau$ влечёт равенство $\eta \circ \pi = \overline{\psi} \circ \pi$. Равенство $\eta = \overline{\psi}$ вытекает из него силу сюрьективности проекции $\pi$. □

Пример 1.6 (тензорные произведения $\mathbb{Z}$-модулей)
Все проделанные в n° 1.2.3 на стр. 8 вычисления сворачиваются при помощи теор. 1.2 в одну строчку: для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{(m)} \otimes \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \simeq \frac{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}}{(m) \otimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \otimes (n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(m, n)} = \frac{\mathbb{Z}}{(\text{нод}(m, n))} ,$$

где предпоследнее равенство задаётся изоморфизмом из упр. 1.4 на стр. 11.

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку $p$ прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре $S$, лежит в пересечении $S \cap T_p S$ этой квадрики с её касательной плоскостью в точке $p$, и плоская коника $S \cap T_p S$ уже полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке $p$ прямых из разных семейств, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.3. Для любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Z} \times A \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ выполняется для единственного $\mathbb{Z}$-линейного отображения $F : A \to W$, $a \mapsto \varphi(1, a)$.

Упр. 1.4. Ср. с упр. 1.3.