Лекция 16 декабря (первая половина)

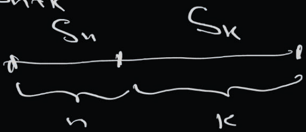
$\mathbb{Z}$-модуль $\bigoplus\limits_{k\geq 1} \mathrm{Rep}\, S_n =: \mathrm{Rep}$

$\mathrm{Rep}\, S_n$ – кольцо представлений S_n, т.е. $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{C}[S_n]$, порождённый неприводимыми характерами.

Произведение Литтлвуда-Ричардсона на Rep

$$\mathrm{Rep}\, S_n \times \mathrm{Rep}\, S_k \longrightarrow \mathrm{Rep}\, S_{n+k}$$

$$S_n, S_k \hookrightarrow S_{n+k}$$



$$S_n \times S_k \longrightarrow S_{n+k}$$

$\forall$ двух представлений $\rho_1 : S_n \to GL(V)$

$\rho_2 : S_k \to GL(W)$

$\rho_1\times\rho_2 : S_k\times S_n \longrightarrow \underline{GL(V\otimes W)}$.

$(g_1,g_2): u\otimes w \longmapsto g_1(u)\otimes g_2(w)$.

представление группы $S_k\times S_n$.

$$[\rho_1]\cdot[\rho_2] := \mathrm{ind}_{S_k\times S_n}^{S_{n+k}}(V\otimes W).$$

$\underbrace{\quad\quad}_{k}\underbrace{\quad\quad}_{n}$

$\underbrace{\quad\quad}_{n}\underbrace{\quad\quad}_{k}$ $\rightsquigarrow$ любые 2 непересекающихся подмножества $I\sqcup J=\{1,\dots,n\}$

$$S_k\times S_n \xrightarrow{i_{I,J}} S_{k+n}$$

{образы всех этих вложений сопряжены

представления $\mathrm{ind}_{S_k\times S_n}^{S_{n+k}}(V\otimes W)$

будут изоморфны}

Лемма: $H\simeq H'$ две сопр. подгруппы

$\rho: H\to GL(V)$ $\qquad \mathrm{ind}_H^G \simeq \mathrm{ind}_{H'}^G$

$\rho: H'\to GL(V)$ $\qquad$ изоморфны.

Факт: умножение К.Р. ассоциативно и коммутативно

$\underbrace{\quad\quad}_{k}\underbrace{\quad\quad}_{l}\underbrace{\quad\quad}_{m}$

$$S_k \times S_l \times S_m \hookrightarrow S_{k+l+m}$$

$$([\rho_k]\cdot[\rho_l])\cdot[\rho_m] = [\rho_k]([\rho_l]\cdot[\rho_m]) = \mathrm{ind}_{S_k\times S_l\times S_m}^{S_{k+l+m}}$$

Теор. Кольцо Rep изоморфно кольцу многочленов от счётного набора переменных $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_3, \dots$, где $\mathbb{1}_k$ – это тривиальное одномерное представление S_k.

$\mathbb{1}_{\lambda_1} \mathbb{1}_{\lambda_2} \dots \mathbb{1}_{\lambda_k}$ $\quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$

$\quad\quad ||$

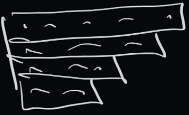
$\mathbb{1}_1^{m_1} \mathbb{1}_2^{m_2} \dots \mathbb{1}_n^{m_n}$ $\quad$ где m_i = количество строк длины i в диаграмме λ

представления $S_{|\lambda|} = S_{\lambda_1+\dots+\lambda_k}$

индуцированное с тривиального 1-мерного представления подгруппы

$$\underline{S_{\lambda_1}\times S_{\lambda_2}}\times\ldots\underline{\times S_{\lambda_k}} \underset{T}{\hookrightarrow} S_{\sum\lambda_i}$$

реализует ↑ произведение



как строчную подгруппу заполнения T формы λ.

Вывод: $\mathbb{1}_{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{\lambda_k} = [M_\lambda]$ модуль таблоидов.

$\mathbb{1}_k = M_{(k)}$

многочлены от $\mathbb{1}_i$ = многочлены от однострочных таблоидов.

$M_{(k)}$

$$[M_\lambda] = [M_{(\lambda_1)}][M_{(\lambda_2)}]\ldots[M_{(\lambda_k)}]$$

Остаётся проверить, что классы $[M_\lambda]$ образуют базис в Rep над $\mathbb{Z}$.

Базис в Rep составляют классы модулей $\underline{S_\lambda \simeq V_\lambda \simeq \mathbb{C}[S_{|\lambda|}]\cdot s_\lambda}$

$$\underbrace{\underline{[M_\lambda]} = \underline{[S_\lambda]} + \sum_{\mu \rhd \lambda} [S_\mu]^{m_\mu}}$$

матрицы перехода треугольные с единицами на диагоналями $\Rightarrow$

$[M_\lambda]$ — это базис над $\mathbb{Z}$

Кольцо симм. функций Λ

$$\mathbb{Z}[x_1] \xleftarrow[x_2=0]{} \mathbb{Z}[x_1,x_2] \xleftarrow[x_3=0]{} \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3]$$

$$\mathbb{Z}[x_1 \dots x_n] \xrightarrow{\pi_{kn}} \mathbb{Z}[x_1 \dots x_k] \quad k \leq n$$

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\underline{f_n}} \, \underline{(x_1, \dots, x_n)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \\ \pi_{kn} f_n = f_k \end{array} \right.$$

$m_{2,1}(x_1) = 0$

$m_{2,1}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

$m_{2,1}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 +$
$+ x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2$

$\vdots$

$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\quad m_{2,1}$

Λ – симм. функции в этом самом смысле

$\underbrace{s_\lambda, \underbrace{e_\lambda, h_\lambda, m_\lambda}_{\text{над } \mathbb{Z}}, \underbrace{p_\lambda}_{\text{базис над } \mathbb{Q}}}$ это базисы в Λ

λ пробегает все диаграммы

$$\boxed{h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu}$$

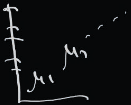
$(h_{\lambda_1}) \dots (h_{\lambda_k})$

число частных вида массивов формы μ

$K_{\mu,\lambda}$ – это число Костки = # Таблиц формы μ и содержания λ (т.е. заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, λ_3 тройками и т.д.).

$$\boxed{s_\mu = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda}$$

DU орбиты биплотного массива



= плотные влево массивы столбцового веса μ

коэффициент при $\underbrace{x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}}$ = таблицы формы λ, единицами λ_1 двойками λ_2 …

Скалярное произведение на Λ и на Rep.

на Λ: будем считать, что базис s_λ ортонормален.

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu \Rightarrow K_{\mu,\lambda} = (h_\lambda, s_\mu)_\Lambda$$

$$\|$$

$$s_\mu = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} m_\lambda \Rightarrow K_{\mu\lambda} = (m_\lambda^*, s_\mu)_\Lambda$$

$$\boxed{m_\lambda^* = h_\lambda}$$

m_λ^* — евклидово двойственный базис к базису m_λ.

Вычислительный факт: Ньютоновские

полиномы p_λ образуют в Λ ортогональный базис со скалярными квадратами

$$\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda = \prod_k (m_k!\, k^{m_k})$$

где m_k = # вхождений k в λ. $\circledast$

Скалярное произведение в Rep.:

сумма $\mathrm{Rep} = \bigoplus \mathrm{Rep}\, S_n$ ортогональна

а на $\mathrm{Rep}\, S_n$ берём стандартное скалярное произведение характеров

$$(\chi_v, \chi_w) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_v(g^{-1}) \chi_w(g) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_v(g) \chi_w(g) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda} |C_\lambda|\, \chi_v(C_\lambda) \chi_w(C_\lambda)$$

$$\boxed{|C_\lambda| = \frac{n!}{z_\lambda}} \qquad = \underbrace{\sum_\lambda z_\lambda^{-1} \chi_U(C_\lambda)\, \chi_W(C_\lambda)}$$

$\underbrace{\chi_{M_\lambda}(C_\mu)}$ = коэффициент при m_λ в разложении p_μ по базису m_λ

$$\boxed{p_\mu = \sum_\mu \chi_{M_\lambda}(C_\mu)\, m_\lambda}$$

$$\chi_{M_\lambda}(C_\mu) = (m_\lambda^*, p_\mu) = \underbrace{(h_\lambda, p_\mu)}$$

Теорема: Отображение $\frac{1}{z_\lambda}(p_\mu, h_\lambda)$

$$ch : \underline{Rep} \longrightarrow \underline{\Lambda}$$

$$[U] \longrightarrow ch(U) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \chi_U(C_\mu) \cdot p_\mu$$

$$M_\lambda \longrightarrow ch(M_\lambda) = \sum_\mu z_\mu^{-1} (h_\lambda, p_\mu)\, p_\mu$$

$\overset{?}{=} h_\lambda$

Это изометрический изоморфизм колец переводящий:

$M_\lambda \longrightarrow h_\lambda$

$S_\lambda \longrightarrow s_\lambda$

$\otimes \operatorname{sgn} \longrightarrow \omega : e_\lambda \leftrightarrow h_\lambda$

$s_\lambda \leftrightarrow s_{\lambda^t}$