Лекция 9 декабря (первая половина)

T - заполнение диаграммы λ

" стандартное заполнение числами $1, 2, .., |\lambda|$

$\underline{\underline{R_T}}, \underline{\underline{C_T}} < S_n$ строчная и столбцовая подгруппы

$$r_T = \sum_{g \in R_T} g \qquad c_T = \sum_{g \in C_T} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

$$s_T = r_T c_T \qquad s'_T = c_T r_T$$

- Представления S_n в левом идеале
  $V_\lambda := \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \simeq \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$
  зависят только от формы λ заполнения T и составляют полный список всех неприводимых представлений S_n

---

Комбинаторная лемма: если заполнения U и T имеют формы $\lambda = \lambda(T)$ и $\mu = \mu(U)$, причём $\mu \not\trianglerighteq \lambda$, то имеется альтернатива:

- либо два элемента из одной строки T лежат в одном столбце U
- либо $\lambda = T$ и $pT = qU$ для некоторых

$p\in R_T$, $q\in C_T$.

Модули таблоидов M_λ

$M_\lambda = \mathrm{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ для некоторого заполнения T формы λ.

$\dim M_\lambda = [S_n : R_T]$

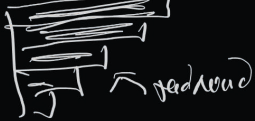
Базис состоит из представителей смежных классов $g\cdot R_T$.

Можно обозначать базисные векторы через

$\{T\}$:= орбита данного заполнения T по действию группы R_T =

$\parallel$

$R_T\cdot T$ = заполнение с точностью до перестановок элементов внутри строк.



$$\{T\} \longmapsto \{gT\}$$

$$g R_T\cdot T = gR_Tg^{-1}gT = R_{gT}\, gT$$

корректно определено и согласуется с действием S_n на смежных классах

S_n/R_T.

Характер модуля таблоидов. M_λ

$\psi_\lambda(C_\mu)$

C_μ класс сопряжённости в S_n циклового типа μ.

формула для индуцированного характера:

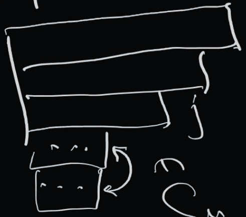
$$C_\mu \cap R_T = \bigsqcup_\rho D_\rho$$

↑ классы R_T-сопряжённости

T - заполнение формы λ.

$\rho = (\rho_{ij})$, где $\underrightarrow{\rho_{ij}}$ - количество циклов длины i в μ, которые заполнены эл-тами из j-той строки заполнения T.

$\rho_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. μ:



$\sum_j \rho_{ij} = m_i$ - количество циклов длины i в диаграмме μ.

$\sum_i \rho_{ij} \cdot i = \lambda_j$ - длину j-той строки диаграммы λ.

$$\psi_\lambda(C_\mu) = \underset{\displaystyle \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_n!}}{\underset{\Vert}{[S_n : R_T]}} \cdot \sum_\rho \underset{\displaystyle 1}{\underset{\Vert}{\underbrace{\chi_1(D_\rho)}}} \cdot \frac{|D_\rho|}{|C_\mu|}$$

$$D_\rho = \frac{\lambda_1!\dots\lambda_n!}{\prod_i i^{m_i} \prod_{ij} \rho_{ij}!} = \frac{|R_T|}{|\mathrm{Stab}\, D_\rho|}$$

$\prod_i i^{m_i}$ — циклические перестановки внутри циклов диаграммы μ

$\prod_{ij} \rho_{ij}!$ — перестановки циклов одинаковой длины как единого целого.

$$C_\mu = \frac{n!}{\prod_i i^{m_i} m_i!} = \frac{|S_n|}{|\mathrm{Stab}_\mu|}$$

$$= \frac{n!}{\prod_j \lambda_j!} \sum_\rho \frac{\prod \lambda_j! \prod_i i^{m_i} m_i!}{\prod_i i^{m_i} \prod_{ij} \rho_{ij}! \, n!} =$$

$$= \sum_\rho \frac{\prod_i m_i!}{\prod_{ij} \rho_{ij}!}$$

Вывод: Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ равно коэфф-ту при стандартном базисном многочлен $m_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ в разложении Ньютоновского многочлена $p_\mu(x_1,\dots,x_n)$ по стандартному мономиальному базису m_λ в кольце симм. функций.

$m_\lambda(x_1,\dots,x_n) = x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}$ + все различные перестановки.

$$p_\mu(x_1,\dots,x_n) = p_{\mu_1}p_{\mu_2}\dots p_{\mu_n} = \underline{\underline{p_1}}^{m_1}\dots\underline{\underline{p_n}}^{m_n}$$

$\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$

m_i = число строк длины i в μ.

$$p_k(x_1,\dots,x_n) = x_1^k+\dots+x_n^k$$

$$p_i^{m_i} = (x_1^i+\dots+x_n^i)^{m_i} = \sum m_i!\frac{x_1^{i\rho_{i1}}x_2^{i\rho_{i2}}\dots x_n^{i\rho_{in}}}{\rho_{i1}!\dots\rho_{in}!}$$

$\rho_{ij}\geq 0$

$\sum_j \rho_{ij} = m_i$

$\underline{p_1}^{m_1}\underline{p_2}^{m_2}\dots p_n^{m_n}$ имеет при $x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n}$ в

$\sum m_1!\dots m_n!$

тности коэфф-т $\sum_{\rho} \frac{}{\prod_{ij} \rho_{ij}}$

сумма идёт по всем $\rho = (\rho_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$$\sum_j \rho_{ij} = m_i \quad \sum_i i \rho_{ij} = \lambda_j$$

Как M_λ раскладывается на неприводимые?

Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим орбиту таблоида $\{T\}$ под действием C_T

$\{T\} = R_T T$

$$M_\lambda \ni v_T = C_T \cdot \{T\} = \sum_{q \in C_T} \mathrm{sgn}(q) \{qT\}$$

↑ различные базисные векторы из M_λ, со знаками

все таблоиды $\{qT\}$ попарно различны когда $q \in C_T$.

$$q_1 T \neq p\, q_2 T \quad \forall p \in R_{q_2 T}$$

$T \neq p\, gT$

$g v_T = g C_T\{T\} = g C_T g^{-1} g\{T\} = C_{gT}\{gT\}$

S_n действует на линейной оболочке векторов $v_T \in M_\lambda$.

Span(v_T | по всем T формы λ) называется модулем Шпехта $S_\lambda \subset M_\lambda$.

Лемма: $C_T M_\mu = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu \\ \mathbb{C} \cdot v_T, & \lambda = \mu \end{cases}$

$\forall$ диаграммы μ

$\forall$ заполнения T формы λ, при условии того $\lambda \ntriangleright \mu$.

Док-во: По комбинаторной лемме: (1) либо Имеются две элемента из одной строки заполнения U формы μ, лежащие в одном столбце заполнения

T формы λ

(2) либо $\lambda = \mu$ и $qU = pT$ для некоторых $\underline{q \in R_U}$ и $\underline{p \in C_T}$.

Если (1) $\Rightarrow$ $\exists$ транспозиция $T \in R_U \cap C_T$.

$$c_T\{U\} = c_T\{TU\} = c_T T\{U\} =$$

$$= \operatorname{sgn}(T)\cdot c_T\{U\} = -c_T\{U\}$$

$c_T\{U\} = 0$ для всех таких таблоидов U.

Если (2) $\Rightarrow$ $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\}$

$$= \operatorname{sgn}(q)\, c_T\cdot\{T\} =$$

$$= \pm v_T$$

достигается только при $\lambda = \mu$

$$c_T M_\lambda = \left[\begin{array}{l} 0 \\ \mathbb{C}\cdot v_T. \end{array}\right.$$