Лекция 2 декабря (вторая половина)

Теорема: Представление S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T = V_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и $V_{\widetilde{T}}$ изоморфны $\iff \lambda(T)=\lambda(\widetilde{T})$.

И это полный$^?$ список неприводимых представлений$^?$ S_n.

Док-во: $\lambda_1 \dots \lambda_n \qquad \mu_1 \dots \mu_n$

Лемма: Пусть $\lambda(T) > \lambda(\widetilde{T}) = \mu$ лексикографически больше. Тогда $\forall g \in G$

$$r_T\, g\, c_{\widetilde{T}} = c_{\widetilde{T}}\, g\, r_T = 0$$

Док-во леммы: $\lambda > \mu \Rightarrow \mu \not> \lambda$

$\mu \neq \lambda$

$\exists$ пара элементов лежащих в одной строке T и в одном столбце $\widetilde{T}$.

Их транспозицию $\tau \in R_T \cap C_{\widetilde{T}}$.

при $g=e$ $\quad r_T \cdot c_U = \underbrace{r_T \cdot T} \cdot c_U = r_T \cdot c_U \cdot (-1)$

$$r_T c_U = -r_T c_U \Rightarrow r_T c_U = 0$$

$$c_U r_T = c_U \underline{\underline{T \cdot r_T}} = -\underset{0}{\underset{\|}{c_U r_T}}$$

$\forall$ $\overset{?}{\text{заполнений}}$ U и T : $\lambda(T) > \lambda(U)$.

$$c_U g r_T = c_U g r_T g^{-1} g = \underline{c_U r_{gT}} \cdot g = 0$$

$$r_T g c_U = r_T g c_U g^{-1} \cdot g \overset{''}{=} r_T \underline{\underline{c_{gU}}}\, g = 0$$

Док-во теоремы: $\quad \underline{\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \supset W}$

S_n-инвар. проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$

действует по правилу $\pi_W(x) = x \cdot \pi_W(1)$

т.е. это умножение справа на

элемент $w = \pi_W(1)$.

$s_T \cdot W < s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$

либо $s_T \cdot W = 0$ (1)

либо $\underset{\underset{W}{\cap}}{s_T \cdot W} = \mathbb{C} s_T . \ni s_T .$ (2)

(2) $\Rightarrow s_T \in W \Longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T < W \Rightarrow$

$W = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$

(1) $\underset{\underset{\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T}{\cap}}{W} \cdot W < \mathbb{C}[S_n] \cdot \underbrace{s_T \cdot W}_{0} = 0$

$w = \pi_W(1)$ $\quad w \cdot w = 0$

$x \longrightarrow x \cdot w$ тождественно действует на W

Тогда $W = 0$

Если $\lambda(T) > \mu = \lambda(U)$ то

оператор s_T на $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_U$ действует нулём!

$s_T \, \mathbb{C}[S_n] \cdot s_U \subset \mathbb{C}[S_n]$

$r_T \boxed{c_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot r_U} c_U$

$\underline{r_T} \, \mathbb{C}[S_n] \cdot \underline{c_U} = 0$

На $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ левое умножение на s_T действует нетривиально $s_T\cdot s_T = \underset{\substack{\vee\\ 0}}{n_\lambda}\cdot s_T$

Если для каждого λ зафиксировать какое-нибудь одно заполнение T с $\lambda(T)=\lambda$ то мы получим полный список неприводимых представлений S_n.

Произвольное другое заполнение U даёт представление $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_U$ тоже неприводимое и НЕ изоморфное никакому из зафиксированных с формой $\lambda\neq\lambda(U)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{C}[S_n]\cdot s_U \simeq \mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$$

если и только если $\lambda(U)=\lambda(T)$

Пример: V_λ представление в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ где T – заполнение формы λ.

↙ одномерное знаковое

$$V_\lambda\otimes \mathrm{sgn} = V_{\lambda^t}$$

Зафиксируем заполнение T формы λ и зафиксируем транспонированное заполнение T^t формы λ^t

$$R_T = C_{T^t} \qquad C_T = R_{T^t}$$

$$S_{T^t} = \sum_{\substack{p\in R_{T^t}\\ q\in C_{T^t}}} p\cdot q\cdot sgn(q) = \sum_{\substack{p\in C_T\\ q\in R_T}} sgn(pq)\cdot sgn(p)\, pq$$

$$= \sum_{\substack{p'\in R_T\\ q'\in C_T}} \underbrace{q'p'\cdot sgn(q')\cdot \underline{sgn(q'p')}}_{\overset{\shortparallel}{\sigma(S'_T)}}$$

Имеется 2 "автоморфизма" алгебры $\mathbb{C}[S_n]$

знаковый: $\sigma: \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$

$$g \longmapsto sgn(g)\cdot g$$

автоморфизм групповой алгебры.

антиавтоморфизм: $\alpha: \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[n]$

$$g \longmapsto g^{-1}.$$

$$\alpha(fh) = \alpha(h)\,\alpha(f).$$

$$\alpha(s_T) = \alpha(r_T c_T) = \alpha(c_T)\alpha(r_T) = c_T r_T$$

$$\overset{\shortparallel}{s'_T}$$

$s_T = r_T c_T$

$\underline{s'_T = c_T r_T}$ усреднение в другом порядке.

Это разные элементы групповой алгебры.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$(123) = (12)\cdot(13) \in \underline{R_T C_T}$

$(321) = (13)\cdot(12) \in \underline{C_T R_T}$

Про s'_T можно доказать всё то же самое, что про s_T.

$$\mathbb{C}s'_T = \{f \in \mathbb{C}[S_n] \mid q\cdot f\cdot p = \operatorname{sgn}(q)\cdot f\}$$

$$s'_T\cdot\mathbb{C}[S_n]\cdot s'_T = \mathbb{C}\cdot s'_T.$$

$\mathbb{C}[S_n]\cdot s'_T$ – неприводимое представление

и они изоморфны ⟺ диаграммы одинаковые.

Более того $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T \simeq \mathbb{C}[S_n]\cdot s'_T$

$$x\cdot c_T \leftarrow\!\shortmid\, x$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[S_n] r_T c_T \arrow[r, bend right, "\psi"'] & \mathbb{C}[S_n] c_T r_T \arrow[l, bend right, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto x r_T$$

$$\varphi\circ\psi : x \longmapsto x\cdot r_T c_T = x\cdot s_T$$

$n_\lambda : s_T s_T = n_\lambda \cdot s_T$

это $n_\lambda\cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T}$

$\frac{\varphi}{\sqrt{n_\lambda}}$ и $\frac{\psi}{\sqrt{n_\lambda}}$ обратны друг другу.

V_λ - неприводимое представление в идеале $\underbrace{\mathbb{C}[S_n]\cdot s'_T}_{}$

$$V_\lambda \otimes \mathrm{sgn} \qquad g : x s'_T \longmapsto \mathrm{sgn}(g)\, g x s'_T$$

$$\Big\downarrow\ \sigma : g \longmapsto \mathrm{sgn}(g)\cdot g$$

$$V_{\lambda^t}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x)\cdot s_{T^t} \longmapsto g\cdot \underline{\underline{\sigma}}(x)\cdot s_{T^t}$$

действие g на $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_{T^t}$

т.е. на модуле V_{λ^t}

градуир. комм. кольцо $\longrightarrow$ $\underline{\bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{Rep}(S_n)}$ градуированное умножение

$$\operatorname{Rep}(S_n)\otimes \operatorname{Rep}(S_m)\to \operatorname{Rep}(S_{m+n})$$

$$\begin{tikzcd} V_\lambda \arrow[d] \\ s_\lambda(x). \end{tikzcd}$$

$\wr\wr$

кольцу симм. функций$^?$ от $x_1, x_2, \ldots$

19 декабря экзамен.

заочно $10^{\underline{00}} - 14^{\underline{00}}$.