Лекция 25 ноября (вторая половина)

Объявление: про экзамен

В воскресенье 19 декабря с 10^{00} до 14^{00} заочно.

В 10^{00} я выложу на сайт курса задачи

До 14^{00} должны прислать решение по электронной почте

Двойственность Шура-Вейля

V — конечномерное векторное пр-во. $\dim V = n$

фиксируем $m \in \mathbb{N}$.

$V^{\otimes m}$ — это модуль над $GL(V) \times S^m$

$g \in S^m$ действуют перестановками сомножителей

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{g(1)} \otimes \ldots \otimes v_{g(m)}$$

$\varphi \in GL(V)$ действует оператором $\varphi^{\otimes m}$

$$\varphi^{\otimes m}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = \varphi(v_1) \otimes \varphi(v_2) \otimes \ldots \otimes \varphi(v_m)$$

Эти действия коммутируют друг с другом.

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}\, S^m} V_\lambda^{\otimes m}$$ ← λ - изотипная компонента

$\varphi \in GL(V)$ переводит $V_\lambda^{\otimes m}$ в себя.

Ключевой факт: $GL(V) \xrightarrow{T_m} \mathrm{End}(V^{\otimes m})$

$T_m(GL(V))$ линейно порождает $\mathrm{End}_{S^m}(V^{\otimes m})$

По теореме о двойном централизаторе: линейная оболочка операторов из S_m линейно порождает $\mathrm{End}_{GL(V)}(V^{\otimes m})$

Основное поле имеет характеристику нуль

Док-во: $\mathrm{End}(\underline{V}^{\otimes m}) = (V^{\otimes m})^* \otimes \underline{V}^{\otimes m}$

$\rotatebox{90}{$\cong$}$ (char k = 0)

$$(V^* \otimes V)^{\otimes m} \underset{\uparrow}{\cong} (V^*)^{\otimes m} \otimes V^{\otimes m}$$

перестановка слагаемых

$$\mathrm{End}(V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}(V)^{\otimes m}}$$

$$\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}(\mathrm{End}(V))$$

$\uparrow$ char $k = 0$

линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$

$$\boxed{\text{Общий факт: char } k=0 \quad \mathrm{Sym}^n V \text{ порождается чистыми степенями } v^{\otimes n}}$$

(Принцип Аронгольда)

Это эквивалентно тому, что пр-во многочленов $S^n V$ линейно порождается чистыми степенями v^n

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^m V \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & S^m V \arrow[d, phantom, "\parallel" description] \\
V^{\otimes m} & V^{\otimes m}/\text{комм.} \\
v^{\otimes m} \arrow[r] & v^m
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{char } k=0}$

$\underline{(a_1e_1 + \dots + a_ne_n)^m}$ не лежат в одной гиперплоскости

$$\sum a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}\, \underbrace{e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n} \cdot \binom{m}{m_1,\dots,m_n}}_{\text{базис в } S^m V}$$

гиперплоскость задаётся линейным уравнением на коэфф-ты, т.е. $\exists\ \Delta_{m_1\dots m_n} \in k$

$$\boxed{\sum A_{m_1\dots m_n} a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n} = 0}$$

тождественно по $a_1\dots a_n \in V$

ненулевой многочлен от $(a_1\dots a_n)\in V$

ненулевой многочлен не может тождественно обращаться в нуль!

$\mathrm{End}_{S^n}(V^{\otimes n})$ линейно порождаются операторами вида $f^{\otimes n}$, где $f \in \mathrm{End}(V)$.

Можно считать, что $f \in GL(V)$. $F = \det f$

Тоже общий факт (усиленный принцип Аронгольда) $V^{\otimes n}$ порождается тензорами $v^{\otimes n}$ с v пробегающими множество вида

$$D(F) = \{v \in V \mid F(v) \neq 0\}$$

где $F : V \longrightarrow \Bbbk$ ненулевой многочлен

$v^{\otimes n} : F(v) \neq 0$ лежат в гиперплоскости $\psi = 0$ $\quad \psi : V^{\otimes n} \longrightarrow \Bbbk$ линейна

$\psi(v^{\otimes n}) \cdot F(v) \equiv 0$ по $v \in V$

↗

многочлен от v

$F \neq 0$ как многочлен

$\psi(v^{\otimes m}) \equiv 0 \Rightarrow \psi = 0$

Операторы из $GL(V)$ — линейно порождают $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes m})$, а перестановки тензорных сомножителей линейно порождают $\mathrm{End}_{GL(V)}(V^{\otimes m})$

λ-изотипная компонента $V^{\otimes m}_{\lambda} \subset V^{\otimes m}$

$$\cong$$

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes m}) \otimes U_\lambda$$

где U_λ - неприводимое представление S_n.

$GL(V)$ действует и $\mathbb{S}^\lambda(V) = \mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, \underline{\underline{V^{\otimes m}}})$

$$\varphi : U_\lambda \to V^{\otimes m}$$

$$F \in GL(V) \quad \varphi \longmapsto F^{\otimes m}\varphi$$

$\mathbb{S}^\lambda$ - неприводимый $GL(V)$-модуль, поскольку линейная оболочка операторов из $GL(V)$ совпадает с $\mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes m})$

$$V^{\otimes m} = \bigoplus_{|\lambda|=m} \mathbb{S}_\lambda(V)\otimes U_\lambda$$

$\mathbb{S}_\lambda(V)$ ↑ неприводимое представление $GL(V)$

U_λ ↑ неприв. представл. S_m

$$\underline{\underline{V}}^{\otimes m} = \bigoplus_\lambda \underbrace{V^{\otimes m}_\lambda} \cong \underbrace{U_\lambda\oplus\ldots\oplus U_\lambda}$$

$$\cong \mathbb{S}^\lambda(V)\otimes U_\lambda.$$

Все неприводимые представления $GL(V)$, которые задаются рациональными функциями

$$GL(V) \longrightarrow GL(W)$$

$$g \longmapsto \boxed{a_{ij}(g)}$$

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{k}) \to \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{k})$$

были рациональными функциями от матричных эл-тов матрицы g

Все такие представления имеют вид

$\mathbb{S}^\lambda(V)\otimes \mathrm{Det}^m$ $\qquad$ $\mathrm{Det}^m: GL(V)\to\mathbb{k}$

$m\in\mathbb{Z}, \quad g\mapsto \det^m g$

↗ модуль Шура

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 \oplus \mathrm{Alt}^3 \oplus V^{\otimes 3}_{\ydiagram{2,1}}$$

S_3-модуль $\qquad \overset{\shortparallel}{V^{\otimes 3}_{\mathbb{1}}} \qquad \overset{\shortparallel}{V^{\otimes 3}_{sgn}} \nearrow$

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{irr}\, S_n} V^{\otimes n}_{\lambda} \leftarrow$$ разложение по типам симметрии тензоров.

Что такое "произвольный тип симметрии"?

$$\pi_{\mathbb{1}} = \frac{1}{6} \sum g \qquad \pi_{sgn} = \frac{1}{6} \sum g \cdot sgn(g)$$

$S^3 = 1, \tau, \tau^2$ – повороты $\quad \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$ – транспозиции

$$\pi_{\Delta} : 1 - \pi_{\mathbb{1}} - \pi_{sgn} = 1 - \underbrace{(\pi_{\mathbb{1}} + \pi_{sgn})}_{\frac{1}{3}(1+\tau+\tau^2)}$$

$$\mathrm{im}\, \pi_{\Delta} = \left\{ t \in V^{\otimes 3} \;\middle|\; \frac{1}{3}(1+\tau+\tau^3)\, t = 0 \right\}$$

усреднение по 3-циклу нулевое

$$f(e_1, e_2, e_3): \quad \underset{\shortparallel}{\ } \quad f(e_1, e_2, e_3) + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(e_2, e_3, e_1)} + f(e_3, e_1, e_2)$$

тождество Якоби.

Лиевские тензоры

$t_1, t_2 \in TV$

$[v_1,[v_2,v_3]] \in V^{\otimes 3}$ $\quad [t_1,t_2] = t_1\otimes t_2 - t_1\otimes t_1,$

$t_1 \in V^{\otimes m_1},$

$v_1, v_2, v_3 \in V.$ $\quad t_2 \in V^{\otimes m_2}$

удовлетворяющей тождеству Якоби. $\quad [t_1,t_2] \in V^{\otimes(m_1+m_2)}$

Упр. Проверить, что $V^{\otimes 3}_{\Delta}$ – линейная оболочка двойных коммутаторов $[v_1,[v_2,v_3]] =$ = все Лиевские тензоры.

2-мерна.

$$V^{\otimes 3}_{\Delta} = \underset{\mathbb{S}^{(2,1)}V}{\underbrace{\mathbb{S}^{\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}}V}} \otimes U_{\Delta}$$

Лиевские тензоры – это прямая сумма двух неприводимых представлений $GL(V)$