Лекция 18 ноября (вторая половина)

Применительно к ситуации когда $A = \Bbbk[H]$ $B = \Bbbk[G]$, где $H \subset G$ — любая подгруппа

представление W группы G

$\downarrow$

ограничение $\operatorname{res} W$ подгруппы H

представление V подгруппы H

$\downarrow$

$\operatorname{ind} V = \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$ — индуцированное представление.

как векторное пр-во $\Bbbk[G] \underset{\Bbbk}{\otimes} V$ — это прямая сумма пространства V с собой $|G|$ раз.

$$k[G]\otimes V = \bigoplus_{g\in G} gV \quad]$$

$gV = V$ gv это вектор $v \in V$, живущий в g-том слагаемом.

$$\underbrace{(gh)v = g(hv)}$$; соотношения.

$gh.V$ надо склеить со слагаемым gV

v из $(gh)V$ отождествляю с hv из gV

$$\mathbb{k}[G]\otimes_{\mathbb{k}[H]} V = \bigoplus_{[g]\in G/H} [g]V$$

всевозможные представители смежных классов по H

$[g] = gH$

$[gV] = V$

Как устроено действие H?

$\forall h \in H$ и $\forall\, [g] \in G/H$

$$[hg] = [g_1]$$

$\exists!\ g_1 \in G$ и $h_1 \in H : hg = g_1 h_1$

$$h \cdot gv := g_1 h_1 v$$

h переводит вектор v у $[g]$-того слагаемого в $\Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V = \sum_{[g]} [g]V$

в вектор $h_1 v$ у $[g_1]$-го слагаемого

Аккуратнее: Зафиксируем представителей $g_1, \dots, g_r$ классов по модулю правого умножения на H.

$h \in H \qquad h[g_i] = [g_j]$

$hg_i = g_j \cdot h'$

$\exists!\, g_j$ и h'

$h : \bigoplus\limits_i g_i V$

$\boxed{h'v} \in V$

$$\begin{tikzcd} g_i v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\cap"] & g_j h'v \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ g_i V & g_j V \end{tikzcd}$$

Пример! $S_2 \subset S_3$

$\langle 1, 2 \rangle$ транспозиция.

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}/(2)}$

2 представление — тривиальное $\mathbb{1}$

и знаковое sgn

$\mathrm{ind}_{\mathbb{1}}$ — 3-мерно

представители смежных классов

gS_2

e, τ, τ^2

поворот на 120

поворот на −120

$e \cdot k \oplus \tau k \oplus \tau^2 k$

координатное пр-во

с базисом $\underset{e\cdot 1}{\overset{\shortparallel}{e}}, \underset{\tau\cdot 1}{\overset{\shortparallel}{\tau}}, \underset{\tau^2\cdot 1}{\overset{\shortparallel}{\tau^2}}$

$S_3 : \mathrm{ind}_{\mathbb{1}}$. $\sigma = [1,2)$ τ

матрица σ в базисе e, τ, τ^2

$[\sigma e] = [e]$

$[\sigma\tau] = \underline{[\tau^2]}$

$\sigma\tau = \tau^2 \cdot \sigma$

$\boxed{\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^2}$

$\tau v \longmapsto \tau^2 \underline{\underline{\sigma}} v = \tau^2 v$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

σ действует как транспозиция $e_2 \leftrightarrow e_3$

Как действует τ

$$\begin{tikzcd}
{[e]} \arrow[r] & {[\tau]} \arrow[r] & {[\tau^2]} \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}$$

3-цикл.

$\mathrm{ind}_{\mathbb{1}}$ = тавтологическое представление S_3 в $\mathbb{K}^3$ перестановками базисных векторов.

$\mathbb{1} \oplus \Delta$

ind

sgn

$$\sigma : \begin{array}{|c|c|c|} e & \tau & \tau^2 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \qquad \tau : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Что это за представление?

Вопрос на дом

Задача (не очень простая): Доказать, что все внешние степени $\Lambda^k \Delta$ неприводимы, где Δ - симплициальное представление S_n

[Трудное упражнение на вычисления с характерами]

$S_n : \mathbb{k}^n$ перестановками базисных векторов.

тавтологическое представление T.

$\chi_T(g) = \#$ неподвижных точек g

$\qquad \qquad \qquad \qquad \parallel$

$m_1(g)$ - число строк длины 1 в цикловом ение g.

$$T = \underset{\substack{\parallel \\ \Bbbk\cdot e}}{\mathbb{1}} \oplus \Delta \leftarrow \text{представление в } \underline{\underline{V/\Bbbk e}}$$

$e=(1,1,\dots,1)$

полной? группой правильного симплекса.

Подсказка к задаче:

$$V = U \oplus W$$

$$\Lambda^k V = \bigoplus_{\alpha+\beta=k} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$$

$$T = \Bbbk\cdot e \oplus \Delta$$

$k-1$

$$\Lambda^k T = \underset{\substack{\parallel \\ \Bbbk e \otimes \Lambda^{k-1}\Delta}}{\Lambda^{k-1}\Delta} \oplus \Lambda^k \Delta$$

$$e\cdot \underbrace{\boxed{}}_{\Lambda^{k-1}\Delta} + \underbrace{\boxed{}}_{\Lambda^k\Delta} \leftarrow \text{не содержит } e \text{ в разложен}$$

$$\boxed{(\chi_{\Lambda^k T}, \chi_{\Lambda^k T}) = 2}$$ Вычисление комбинаторное

$\Downarrow$

оба $\Lambda^{k-1}\Delta$ и $\Lambda^k \Delta$ неприводимы и различны.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(H) \arrow[r, bend left, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Rep}(G) \arrow[l, bend left, "\mathrm{ind}"] \end{tikzcd}$$

$H \subset G$ – подгруппа

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}\, V, W) \\ \shortparallel \\ \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{res}\, W) \\ \forall\ G\text{-модуля } W \text{ и } \forall\ H\text{-модуля } V \end{gathered}}$$

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A V, W) = \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{res}\, W)$$

Взаимность Фробениуса:

$$(\chi_{\operatorname{ind} V}, \chi_W) = (\chi_V, \chi_{\operatorname{res} W})$$

в $\Bbbk^G$ — в H^G

если:

W - неприводим
V - неприводим
кратность вхождения W в ind V
такая же, как кратность вхождения
V в res W

Следствие: Если в группе G есть абелева подгруппа H, то размерность любого неприводимого представления группы G $\leq [G:H]$

Док-во Берём неприводимый G-модуль U. Ограничиваем его на H.

где U содержит

Неприводимые представления конечной абелевой

1-мерный неприв. группы одномерны

H-подмодуль L

$\Downarrow$

U входит в разложение ind L

$\dim U \leq \dim \operatorname{ind} L$

[перестановочные диагонализуемые операторы диагонализуются одновременно в некотором базисе]

$$\Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} \underset{\text{одномерно}}{L} \qquad [G:H]$$

$$= \bigoplus_{[g]\in G/H} [g]\cdot L$$

В следующий раз: Соответствие Шура-Вейля между неприводимыми представлениями GL(V) и S_n и типы симметрии тензоров.

$GL(V) \circlearrowright V^{\otimes n}$ $\qquad S_n$

V и и друг про друга ничего не знают.

Найти классификацию неприводимых представлений S_n?