Лекция 11 ноября (первая половина)

Представления конечных групп

- Имеется проектор на G-инварианты

$G \hookrightarrow GL(V)$ V - конечномерно

$\operatorname{char} \Bbbk \nmid |G|$

$\exists$ G-инвар. оператор $V \twoheadrightarrow V^G$ пр-во инвар-тов

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$$

$$v \mapsto v^\natural = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \leftarrow \text{центр тяжести } G\text{-орбиты.}$$

(если G конечна, то V м.б. любым, в том числе и бесконечномерным)

Если G компактна, а $V \simeq \mathbb{R}^n$ представление непрерывно

$v \mapsto v^\natural$ = центр тяжести G-орбиты

$\boxed{\text{Бекар}}$

- компакт в $\mathbb{R}^n$

i-тая координата $v_i^\natural = \int_{Gv} x_i \, dx_1 \ldots dx_n$

- Любое представление конечной группы G вполне приводимо $(\underline{\operatorname{char} \Bbbk \nmid |G|})$

$\forall$ G-подмодуля $U < V$ всегда по умолчанию можно построить G-инвар. проектор $\pi_U^\natural : V \to U$ $\quad V = U \oplus \ker \pi_U^\natural$

$\pi_U : V \to U$ - любой у $\mathrm{End}_\Bbbk(V)$

$$\downarrow$$

$$\pi_U^\natural = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \pi_U g^{-1} \in \mathrm{End}_\Bbbk(V)^G = \mathrm{End}_G(V)$$

это проектор.

G - конечная группа, K - комм. кольцо

$K[G] = K \otimes G$ - свободный K-модуль с базисом G

$$\parallel$$

$$\sum_{g \in G} x_g \cdot g$$

$\nwarrow$ алгебра над K (некоммутативная)

$$\sum_{g \in G} x_g g \cdot \sum_{h \in G} y_h h := \sum_{g h} x_g y_h g h =$$

$$= \sum_{g \in G} \Big(\sum_{h_1 h_2 = g} x_{h_1} y_{h_2} \Big) g$$

представления G в $GL(V)$ $\quad V$ над $\Bbbk$

$\Updownarrow$

представления $\Bbbk[G]$ в $\mathrm{End}(V)$

$$\pi_{\mathbb{1}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \in \Bbbk[G] \in Z(\Bbbk[G])$$

любое представление переводит его в проектор на инварианты этого представления.

$$Z(\Bbbk[G]) = \sum_{g\in G} \underset{\substack{\shortparallel \\ f}}{x_g g} : \underline{\underline{x_{hgh^{-1}} = x_g \ \forall h}}$$

$$h^{-1} f h = f \qquad \forall h \in G$$

$$\sum x_g \underbrace{h^{-1} g h}_{=g} = \sum x_g g$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{g\in G} x_{hgh^{-1}} g$$

$\dim Z(\Bbbk[G]) = |Cl(G)| \leftarrow$ число классов (сопряжённости)

Устройство $\Bbbk[G]$

G действует на $\Bbbk[G]$ левыми умножениями

$$L : G \longrightarrow GL(\Bbbk[G])$$

$$g \longmapsto L_g : f \longmapsto gf$$

точное эффективное представление

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} I_\lambda$$

$\leftarrow$ изотипная компонента типа λ

$\parallel$

линейная оболочка всех подмодулей, изоморфных заданному неприводимому U_λ

$gI_\lambda < I_\lambda$

$\Downarrow$

I_λ это левый идеал.

Правое умножение на $h : \Bbbk[G] \to \Bbbk[G]$

$$f \longmapsto fh$$

перестановочно с левым действием G

$$g(fh) = (gf)h$$

умножение на h справа G-линейно, переводит I_λ в I_λ $\Rightarrow$ I_λ двусторонний идеал.

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} I_\lambda = \prod I_\lambda$$

как алгебры

$$\begin{tikzcd} I_\lambda \cap I_\rho = 0 \\ I_\lambda I_\rho \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$ при $\lambda \neq \rho$

Любое представление $\Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ переводит I_λ внутрь V_λ.

$\Downarrow$

I_λ действует нулём в любом представлении, не содержащем подмодулей $\simeq U_\lambda$.

$I_\lambda v = \{gv \mid g \in I_\lambda\} \longleftarrow v \in V$

$\uparrow$

G-подмодуль в V

G-гомоморфизм
$$\begin{tikzcd} I_\lambda \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cap"] & I_\lambda v \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ \Bbbk[G] \arrow[r, phantom, "f \longmapsto fv"] & V \end{tikzcd}$$

I_λ должно переводить внутрь V_λ

$\Downarrow$

$I_\lambda v < V_\lambda \quad \forall v \in V$.

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\text{rep}} \prod \mathrm{End}(U_\lambda)$$

$$\underset{\lambda\in Irr}{\bigoplus} I_\lambda \qquad g \longmapsto \left(\lambda_g : V_\lambda \to V_\lambda\right)_{\lambda \in Irr} \qquad \lambda\in Irr(G)$$

I_λ отображается в такой набор операторов, у которого все компоненты кроме компоненты у $End(V_\lambda)$ нулевые

По теореме Бернсайда проекции $\Bbbk[G] \to End(V_\lambda)$ эпиморфны

$$\begin{tikzcd} rep : I_\lambda \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & End(V_\lambda) \\ & 0 \in End(V_\rho) \text{ при } \rho \neq \lambda. \end{tikzcd}$$

rep глобально инъективен, т.к. если $f \in \Bbbk[G]$ действует нулём во всех V_λ, то он действует нулём в любом представлении $\Rightarrow L_f \in End(\Bbbk[G])$ тоже нуль.

$$f \cdot 1 = f \Rightarrow f = 0.$$

$$\bigoplus I_\lambda = k[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in Irr} End(U_\lambda)$$

Теорема Машке.

- Число неприводимых представлений конечно
- $\dim End\, U_\lambda = \dim U_\lambda^2 \Rightarrow$

  $$|G| = \dim \mathbb{k}[G] = \sum_{\lambda \in Irr(G)} \dim^2 U_\lambda$$

- $Z\left(\prod End\, U_\lambda\right) = \prod Z(End\, U_\lambda) = \prod \mathbb{k}$

  $\#$ неприводимых представлений $=$

  $= \dim Z(\mathbb{k}[G]) = |Cl(G)|$

  число классов

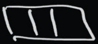
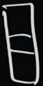
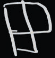
Пример Представления S_3

- тривиальное $\mathbb{1}$ на $\mathbb{k}$ $ge = e$
- знаковое α на $\mathbb{k}$

  $g \cdot e = sgn(g) \cdot e$

- 2-мерное представление группой

треугольник Δ в $\mathbb{k}^3$

$1^2+1^2+2^2=6$

Δ - неприводимо.

Упражнение

У любой симм. группы S_n есть эти три представления $\mathbb{1}$, $\mathrm{sgn}=\varepsilon$, Δ

симплициальное представление размерности $n-1$

$S_n : \mathbb{R}^n$ перестановками базисных векторов.

$\Bbbk\cdot(\underbrace{e_1+\ldots+e_n}_{e})$ — тривиальное 1-мерное подпредставление

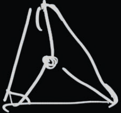
$S_n : \mathbb{R}^n/\Bbbk e$ — симплициальное представление перестановками вершин $(n-1)$-мерного симплекса

$\cong$

$\mathbb{R}^{n-1}$

$[e_1],\ldots,[e_n]$

и имеют сумму 0



$\longrightarrow$ Упр на дом $\longrightarrow$

$\boxed{\text{Проверить, что } \Delta \text{ неприводимо } \forall S_n}$

Подсказка! орбита любого $\neq 0$ вектора линейно? порождает всё пр-во.

S_3 проекторы на неприводимые представления.

$$\begin{array}{c} \pi_{\mathbb{1}} = \frac{1}{6}\sum g \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{k}[G] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \pi_{sgn} = \frac{1}{6}\sum sgn(g)\cdot g \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{k}[G] \end{array}$$

В любом представлении $\pi_{\mathbb{1}} = H$ — проектор на инварианты ($= \mathbb{1}$-изотипную компоненту) π_{sgn} — проектор на sgn-изотипную компоненту.

$$\boxed{\pi_{\mathbb{1}}\pi_{sgn} = \pi_{sgn}\pi_{\mathbb{1}} = 0}$$

$$I_{\mathbb{1}} = (\pi_{\mathbb{1}}) \qquad I_{sgn} = (\pi_{sgn})$$

$$\pi_{\Delta} = 1 - \pi_{\mathbb{1}} - \pi_{sgn} = 1 - \frac{1}{3}(1 + T + T^2)$$

T — это 3-цикл.

$V^{\otimes 3}$ — S_3-модуль $(\forall V)$

S_3 переставляет сомножители

$\parallel$

$$V^{\otimes 3}_{1} \oplus V^{\otimes 3}_{sgn} \oplus V^{\otimes 3}_{\Delta}$$

$\uparrow$ симм. тензоры

$\uparrow$ кососим. тензоры

$\uparrow$ образ проектора $\pi_\Delta = 1 - \underbrace{\frac{1}{3}(1+T+T^3)}_{\text{усреднение по 3-циклу}}$

$$\pi_\Delta(\overset{\in V^{\otimes 3}}{t}) = t \iff$$

$$\boxed{t + Tt + T^2 t = 0} \leftarrow \text{тождесво Якоби.}$$

$a, b, c \in V$ $\qquad [a,[b,c]]$ в TV

$\qquad = [a, b\otimes c - c\otimes b]$

$\qquad a\otimes b\otimes c - a\otimes c\otimes b + b\otimes c\otimes a - c\otimes b\otimes a$

лежат в $V^{\otimes 3}_{\Delta}$

удовл. тожд. Якоби $\nearrow [a,[b,c]]$

Лиевские тензоры

$$V^{\otimes 3} = Sym^3 \oplus Alt^3 \oplus Lie.$$

Упр. $V^{\otimes 3}_{\Delta}$ линейно порождается двойными коммутаторами $[a,[b,c]]$, $a, b, c \in V$.
