лекция 4 ноября (вторая половина)

Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто

то $c_{WV} : \mathrm{Hom}_R(V,W)\otimes V \longrightarrow W$

инъективно (и задаёт изоморфизм

между W_V и $\mathrm{Hom}_R(V,W)\otimes V$)

W_V - сумма простых подмодулей,

изоморфных V.

$\Downarrow$

он полупрост и является прямой

суммой таких подмодулей $W_V = \bigoplus V_i$

$$\varphi_i : V \xrightarrow{\sim} V_i \subset W$$

$$\mathrm{Hom}_R(V,W) = \mathrm{Hom}_R(V,W_V) =$$

$$= \bigoplus \mathrm{Hom}(V,V_i)$$

$\swarrow$ зафиксируем базисный $\ni \varphi_i$ вектор

каждый $\mathrm{Hom}(V,V_i)$ - одномерен

$$\mathrm{Hom}_R(V,W)\otimes V = \bigoplus \varphi_i \otimes V$$

Любой элемент однозначно записывается в виде суммы

$$\sum \varphi_i \otimes u_i$$

$$\Big\downarrow c_{WU}$$

$$\sum \underset{\substack{\cap \\ V_i}}{\varphi_i(u_i)} \in \bigoplus V_i$$

каждое слагаемое в своей компоненте

$$0 \Rightarrow \forall i \ \varphi_i(u_i) = 0 \Rightarrow u_i = 0$$

т.к. φ_i инъективны.

У любого полупростого модуля W в любом его разложении в сумму простых сумма всех слагаемых, изоморфных данному простому модулю U, не зависит от способа разложения и изоморфна $W_U = \operatorname{im} c_{WU}$.

$$W = \bigoplus_{\underline{U \in irr(R)}} W_U$$

изотипное разложение

$\mathrm{irr}(R)$ – множество представителей классов изоморфизма неприводимых R-модулей.

Если $\dim W < \infty$, то $\dim W_U < \infty$

$$m_U(W) = \frac{\dim W_U}{\dim U}$$

– число слагаемых, изоморфных U в любом разложении W в прямую сумму простых подмодулей

m_U – кратность вхождения простого U в полупростой W.

$\forall$ конечномерных полупростых модулей V и W

$$\dim \mathrm{Hom}_R(V,W) = \dim \mathrm{Hom}_R(W,V)$$

$$\dim \mathrm{Hom}_R(V,W) = \dim \mathrm{Hom}_R(W,V) = \sum_{U \in \mathrm{irr}\, R} m_U(V)\, m_U(W)$$

$$V = \bigoplus_{v \in \mathrm{irr}R} V_v \qquad W = \bigoplus_{v \in \mathrm{irr}R} W_v$$

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \bigoplus_{v_1, v_2 \in \mathrm{irr}R} \mathrm{Hom}(V_{v_1}, W_{v_2})$$

$$v_1 \simeq v_2 \quad \mathrm{Hom}(V_{v_1}, W_{v_2}) = 0$$

$$v = v_1 \simeq v_2 \quad \dim(V_{v_1}, W_{v_2}) = m_v(V) \cdot m_v(W)$$

Представление конечных групп

Линейное представление группы G в векторном пр.-ве V — это гомоморфизм группы $G \to GL(V)$.

$\Bbbk[G]$ – групповая алгебра
группы G

$\parallel$

$\Bbbk\otimes G$ – векторное пр-во с базисом
G = множество формальных линейных комбинаций

$$f \in \sum_{g\in G} x_g \cdot g$$

$$\Big(\sum_{g\in G} x_g \cdot g\Big)\cdot\Big(\sum_{h\in G} y_h \cdot h\Big) =$$

$$= \sum_{g,h\in G} x_g y_h \, gh =$$

$$= \sum_{g\in G} z_g \; g$$

$$z_g = \sum_{h_1,h_2 \,:\, h_1h_2=g} x_{h_1} y_{h_2}$$

Линейные представления

$G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ и $\Bbbk[G] \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathrm{End}(V)$

биективно соответствуют друг другу

$\tilde{\rho}$ - продолжение по линейности

$\tilde{\rho}(\Bbbk[G])$ = линейная оболочка $\rho(G)$

$\|$

ассоциативная оболочка.

U, V — G-модули

$$\left.\begin{matrix} U\oplus V \\ U\otimes V \\ SU, \Lambda U, TU \end{matrix}\right\} - G\text{-модули}$$

$$g((u,v)) = (gu, gv)$$

$$g(u\otimes v) = gu\otimes gv$$

$$g(u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_m) = g(u_1)\cdot g(u_2)\cdot\ldots\cdot g(u_m)$$

$$g(u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_m) = g(u_1)\wedge\ldots\wedge g(u_m).$$

V - G-модуль, то на V^* тоже можно ввести структуру G-модуля, так чтобы свёртки векторов с ковекторами были G-инвариантны

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$\rho^* : G \to GL(V^*)$$

хотим, чтобы $\langle v, \psi \rangle = \langle \underbrace{\rho(g)v}, \rho^*(g)\psi \rangle$

$\forall g \in G,\ v \in V,$
$\psi \in V^*$

линейный
$\rho(g)$ - изоморфизм

$(\rho(g))^{-1}$

$\parallel$

$$\langle \rho(g^{-1})u, \psi \rangle = \langle u, \rho^*(g)\psi \rangle$$

$\rho^*(g)$ = оператор, двойственный
к $\rho(g^{-1})$

(транспонированный
к обратному)

V, W - G-модули

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ - G-модуль.

$\cong$

$V^* \otimes W$

Упражнение!

$g: \varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}$

что предыдущие конструкции дают такое действие G на $\varphi: V \longrightarrow W$

$\varphi \longmapsto \lambda(g)\circ\varphi\circ\rho(g^{-1})$

$\rho: G \to GL(V)$
$\lambda: G \to GL(W)$

Упражнение — подействовать на разложимые

$\mathrm{Hom}_G(V,W)$ — инварианты (неподвижные относительно всех $g\in G$) представления G в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$

$g\varphi = \varphi g$

$\Updownarrow$

$g\varphi g^{-1} = \varphi$

$\forall$ линейного представления конечной группы (компактной группы) G в векторном пр-ве $\underline{V}$ над полем $\mathbb{K}$ (над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$)

$\mathrm{char}\,\mathbb{K} \nmid |G|$

является G-инвар. проектор на G-инварианты.

$\exists\ \pi: V \longrightarrow V^G = \{v \mid gv = v\ \forall g \in G\}$

$\cap$

$\mathrm{Hom}_G(V, V^G)$ $\quad v \longmapsto v^\natural$ "бекар"

оператор Рэйнольдса

G-линейный проектор на инварианты.

у вектора конечная орбита.

(у вектора компактная орбита)

центр тяжести — инвариантен.

$$\boxed{v^\natural = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} gv}$$

у компакта в $\mathbb{R}^n$ тоже есть центр тяжести

$U \subset W$ можно строить G-инвар. проектор

$W \twoheadrightarrow U$.

Берём какой-нибудь $\Bbbk$-линейный проектор $\pi : W \twoheadrightarrow U$ и проектируем его на инварианты $\mathrm{Hom}_G(W, U) \subseteq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, U)$

$$\pi^{\natural} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g\pi g^{-1}$$ ← перестановочен с G.

Это проектор на U.

$\mathrm{im}\,\pi^{\natural} \subset U \longrightarrow$

$\pi^{\natural}\big|_U = \mathrm{Id}_U$

$\sum_{g\in G} g\pi g^{-1} v$

$\pi g^{-1} v \subset U$

$\pi(v) \subset U$

$g\underline{\pi} \subset U$

$g : U \to U$

$g\underbrace{\pi g^{-1} u}_{\cap\, U}$ $\quad g : U \to U$

$\| \qquad \pi g^{-1} u = g^{-1} u$

$g g^{-1} u = u \quad \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} u = u.$

- На каждый G-подмодуль имеется G-инвариантный проектор.

$\Downarrow$

всякое представление конечной группы G над полем $\mathbb{k}$ с $\operatorname{char}\mathbb{k} \nmid |G|$ вполне приводимо.

$$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \mathrm{Hom}_G(W,V)$$

характер представления $\rho : G \to GL(V)$

$\chi_\rho : G \to \mathbb{k}$ это функция на группе.

$$\chi_\rho(g) = tr[\rho(g)]$$

$$tr(aga^{-1}) = tr(g) \Rightarrow$$

(1) характер постоянен на классах сопряжённости

$$\chi_\rho : \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{классы сопряжённости}}}{Cl(G)} \to \mathbb{k}$$

(2) У изоморфных G-модулей равные характеры

$\rho: G \to GL(V)$

$\lambda: G \to GL(W)$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f", "\sim"'] & W \\
V \arrow[u, "\rho(g)"] \arrow[r, "f", "\sim"'] & W \arrow[u, "\lambda(g)"']
\end{tikzcd}$$

$$\rho(g) = f^{-1} \lambda(g) f$$

$$\operatorname{tr}(\rho(g)) = \underset{\displaystyle \operatorname{tr}(f^{-1} \lambda(g) f)}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{tr}(\lambda(g))}}$$