лекция 28 октября (вторая половина)

Пример: $R = \{f\}$ один оператор.

$V_R = \Bbbk \cdot f$ 1-мерное подпр-во

$A_R = TV_R = \Bbbk \oplus \Bbbk f \oplus \Bbbk f^{\otimes 2} \dots \simeq \Bbbk[t]$

$f^{\otimes m} \longmapsto t^m$

- пр-во с одним оператором — это модуль над $\Bbbk[t]$

задать $f \in \operatorname{End}(V) \Longleftrightarrow$ задать гомоморфизм алгебр

$$\operatorname{ev}_f : \Bbbk[t] \longrightarrow \operatorname{End}(V)$$

$$t \longmapsto f$$

$$p(t) \longmapsto p(f)$$

Всякий $\Bbbk[t]$ модуль изоморфен

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}$$

где $p_i \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы

Модуль неразложим ⟺ он изоморфен $\frac{\mathbb{k}[t]}{(p^m)}$

такой? неразложимый? модуль неприводим ⟺ $\boxed{m=1}$ $\frac{\mathbb{k}[t]}{(p)}$

Полупростые $= \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1)} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_m)}$

над замкнутым полем полупросты f $\Updownarrow$ диагонализуемы

Пример: Пусть множество R - любое но все операторы друг с другом коммутируют.

- Если $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, то у всех операторов есть общий собственный вектор

$\boxed{fg = gf}$

v собственный для f: $fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{k}$

$fgv = gfv = g(\lambda v)$ $\Downarrow$ gv тоже собственный для f с тем же собственным числом

$\parallel$
$\lambda g v$

все операторы из R переводят каждое собственное подпр-во оператора f в себя.

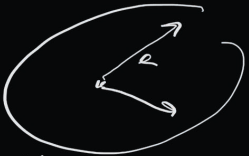
Если операторы скалярны (это так если $\dim V = 1$) любой вектор — общий собственный.

Если $\exists$ нескалярный f, то у него есть нетривиальное собственное подпр-во $V_\lambda = \{v \mid fv = \lambda v\} < V$ $V_\lambda \neq 0, V$.

В V_λ по индукции (по $\dim V$) есть общий собственный вектор.

Неприводимые модули над любым множеством коммутирующих операторов одномерны, если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто

- Поучительный контрпример повороты в евклидовом $\mathbb{R}^2$



поворот на угол φ
над $\mathbb{C}$ имеет два
разных собственных числа
$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$

Если все операторы (коммутирующие) из R диагонализуемы, то они диагонализуются в общем для всех операторов базисе.

Пример: R — конечная абелева группа.

$|R| = n$ и $\operatorname{char} \Bbbk \nmid n$, $\Bbbk$ — алг. зам.
$f^n = 1$ $t^n - 1$ — полностью распадается на различные линейные

множители

Вывод: Любое линейное конечномерное линейное представление конечной абелевой группы над замкнутым полем является прямой суммой одномерных

Полупростота V является модулем над ассоциативной алгеброй A.

Разрешаем $\dim V = \infty$.

Факт: Пусть модуль V линейно порождается некоторым множеством S своих простых подмодулей. Тогда $\forall$ подмодуля $U \subset V$ $\exists$ подмодуль $W \subset V$: $V = U \oplus W$ [у каждого подмодуля есть дополнительный]

- более того, W можно выбрать так, чтобы он был прямой суммой модулей из S

- Для $U=0$ утверждение тоже осмысленно и означает, что V — это прямая сумма модулей из S (т. е. в частности V полупрост).

Док-во: $\underline{U<V}$, $U\neq V$

$L\in S$ $\quad L\cap U = \begin{cases} 0 \\ L \end{cases}$

если $\forall L\in S$ $\; U\cap L = L \Rightarrow U=V$

$\Rightarrow \exists L: L\cap U = 0 \Rightarrow L\oplus U$ прямая.

Рассмотрим все такие $M<V$, что

(1) M — это прямая сумма модулей из S

(2) сумма $M+U$ прямая

Это ЧУМ по отношению $M_1\leq M_2$

$\Leftrightarrow$

$M_2 = M_1\oplus K$

для K из этого множества

Этот порядок полный

Максимальный элемент $\underline{M_{max}}$

это то, что нужно. в качестве W

$$U \oplus M_{max} = V$$

если нет $\exists L \in \mathcal{L} : (U \oplus M_{max}) \cap L = 0$

$$U \oplus (\underbrace{M_{max} \oplus L}_{\check{M}_{max}})$$