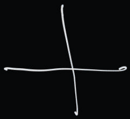
Лекция 7 апреля (первая половина)

① Локальные карты могут быть негладкими



$X_U = V(x_1x_2) \subset \mathbb{A}^2$

такая карта не гладкая

в дифф. геом

② "Неотделимость" $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$

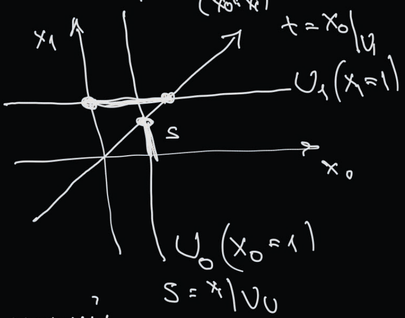
$(x_0:x_1) \sim \left(\frac{x_0}{x_1}:1\right)$, $\frac{x_0}{x_1} = t$

$\wr$

$\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$, $\frac{x_1}{x_0} = s$

$\boxed{s = \frac{1}{t}}$

правило склейки

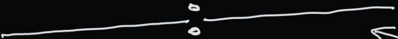


$\mathbb{P}_1$ - это склейка двух копий аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ по дополнению до нуля $(\mathbb{A}^1, s)$ $(\mathbb{A}^1, t)$

$$\{s \neq 0\} \longleftrightarrow \{t \neq 0\}$$

$$s \longleftrightarrow t = 1/s$$

$\mathbb{A}^1\setminus 0$ склеен с $\mathbb{A}^1\setminus 0$ по правилу $s \leftrightarrow \underline{t = s}$



неотделимое многообразие.

правило склейки карты U с картой W

↓

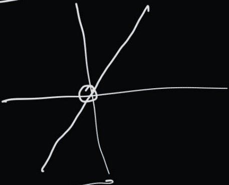
это подмножество в $U \times W$

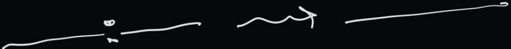
$\cup$

(u,w) которые надо приклеить друг к другу.

$$\boxed{\mathbb{A}^2 \supset (t,t) : t \neq 0}$$

незамкнуто и его продолжить – замкнуть в точку $(0,0)$

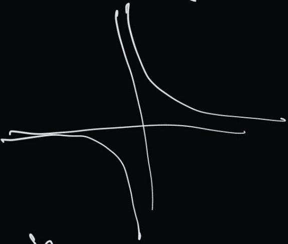




$\mathbb{P}^1$ $\quad t \longleftrightarrow \frac{1}{t}$

замкнуто!

$\mathbb{A}^2 \supset (t, 1/t)$



$\boxed{(u,w)} \subset U \times W$

$\shortparallel$

$\Delta = \{x, x\} \subset X \times X$ в X.

покрывается картами $U \times W$

правило склейки – это пересечение

$\Delta \cap U \times W$

Многообразие X называется отделимым если $\Delta \subset X \times X$ замкнута ($\Longleftrightarrow$ $\Delta \cap U \times W$ замкнуто $\forall$ аффинных карт U, W на X)

$\mathbb{A}^n$ <u>отделимо</u] $\qquad \Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \qquad \underline{x_i = y_i}$

$\mathbb{P}^n$ отделимо $\qquad \Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \qquad \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0$

$x_0 \dots x_n \quad y_0 \dots y_n$

пересечение с аффинн.

Любое замкнутое подмногообразие отделимого отделимо $\qquad Z \subset X$

$$\underline{\Delta_Z} \subset Z \times Z = \underline{\Delta_X \cap Z \times Z}$$

$Z \subset X$ в каждой аффинной карте X_U на X задаётся каким-то идеалом $I_U \subset \mathbb{k}[X_U]$

I_U образуют пучок на X $\qquad$ пучок идеалов многообразия Z.

Замечание. Всякое замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}_n$ можно задать глобальными однородными уравнениями.

$\{f_i(x_0,\dots,x_n)=0\}_{i\in M=\{1,\dots,m\}}$

$V(f_1,\dots,f_m)$

$V\cap U_i$ $x_i=1$ задаётся аффинными неоднородными уравнениями

$$\{f_\mu^{(i)}(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)\}_\mu$$

В каждом U_i имеется идеал $I_i\subset \Bbbk[t_{i,\nu}]$

$\cong$

$$\operatorname{Spec}[t_{i,0},\dots t_{i,n}] \qquad t_{ij}=\frac{x_j}{x_i}$$

нет t_{ii}

если I_i порождается (неоднородными) многочленами $f_\mu^{(i)}(t_{i,0},\dots t_{in})\in I_i$

$\Downarrow$

$$\overline{f}_\mu^{(i)}(x_0,\dots,x_n) \qquad \deg\overline{f}_\mu^{(i)}=\deg f_\mu^{(i)}$$

$$\overline{f}_\mu^{(i)}(t_{i,0},\dots t_{i,i-1},1,t_{i,i+1},\dots t_{in})=$$
$$=f(t_{i,0},\dots,t_{i,i-1},t_{i,i+1},\dots,t_{in})$$

заменить все $t_{i\nu}$ на x_ν, после этого домножить каждый моном на подходящую степень x_i чтобы многочлен стал однород.

ньем.

Утв. Z : $Z \cap U_i = V(I_i)$ можно задать однородными уравнениями

$$g_{i\mu} \qquad x_i \overline{f^{(i)}_\mu}(x_0, \dots, x_n) = 0$$

Y // объединение всех $f^{(i)}_\mu$ по всем картам. $i = 0, \dots, n$

$$Y = V(g_{i\mu}) \qquad Y \cap U_i = Z \cap U_i$$

$$\boxed{x_i = 1}$$

$$x_i \overline{f^{(i)}_\mu}\Big|_{x=1} = f^{(i)}_\mu \in I_i$$

$$Y \cap U_i \subset \underline{Z \cap U_i}$$

все уравнения $x_j \overline{f^{(j)}_\mu} = 0$ автоматически выполняются $\boxed{U_i \cap Z}$ $\quad x_j = 0$ на $U_i \setminus U_j$

$\underline{f^{(j)}_\mu}$ зануляется на $\begin{matrix} Z \cap U_j \\ \cup \\ Z \cap U_i \cap U_j \end{matrix}$

Замкнутые подмногообразия в $\mathbb{P}^n$ можно задать однородными уравнениями

Многообразие X наз. проективным, если его можно замкнуто вложить в $\mathbb{P}$,

Примеры $\quad Gr(k,V) \xhookrightarrow{p} \mathbb{P}(\Lambda^k V)$

вложение Плюккера

U с базисом $\underline{u_1,\dots,u_k}$ $\longleftrightarrow$ 1-мерное подпр-во с базисом $\underline{u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_k}$

$$U \longmapsto \Lambda^k U \subset \Lambda^k V$$

$$p(Gr(k,V)) \subset \mathbb{P}(\Lambda^k V)$$

$\omega \in \Lambda^k V$: $\omega = u_1\wedge\dots\wedge u_k \iff$

$\underline{\dim Supp(\omega) = k} \iff$

выполнены соотношения

Плюккера $\quad \omega \wedge \partial_{i_1\dots i_{k-1}}\omega = 0$

все производные порядка $(k-1)$ (они имеют степень 1) порождают $Supp(\omega)$

Пример 2: $\mathbb{P}(V_1)\times\dots\times\mathbb{P}(V_n)$ проективно многообразие. $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$

$$\boxed{\Lambda^n W = \bigoplus W_{k_1 \dots k_n}} \qquad \sum k_i = n$$

$W_{k_1,\dots,k_n}$ порождается всевозможными произведениями $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ в которых ровно k_i векторов лежат в V_i

$$\Lambda^n W \supset W_{\underbrace{1\dots1}_{n}} \qquad v_1\wedge\dots\wedge v_n, \ v_i \in V_i$$

линейное подпр-во в $\Lambda^n W$

$$\cong \ V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \longmapsto v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)\times\dots\times\mathbb{P}(V_n) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{P}(V_1\otimes\dots\otimes V_n) \\ \mathbb{P}(\Lambda^n(V_1\oplus\dots\oplus V_n)) & \end{tikzcd}$$

как мн-во разложимых тензоров

$=$

$\mathbb{P}(W_{1\dots1}) \supset$ множество разложимых грассмановых многочленов

как $Gr(n, W) \subset \mathbb{P}(W_{1\dots1})$ сечение грассманиана проективным подпр-вом.

Теория результантов

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$

$$\begin{cases} f_1(x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_0, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

степени $\deg f_i = d_i$

Когда мн. во решений не пусто?

$f_i \in S^{d_i}V^*$ $\qquad V(f_i) = S_i$ точка в $\mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$

пр-во гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n$

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{P}_{N_i}}$

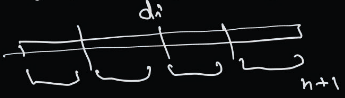
$$\boxed{N_i = \binom{d_i+n}{n} - 1}$$

$\dim V^* = n+1$

$\dim S^{d_i}V^* = \binom{d_i+n}{n}$

$x_0^{m_0} \ldots x_n^{m_n} : \sum_\nu m_\nu = d_i$

$m_0 + \ldots + m_n = d_i, \; m_i \geq 0$



$\mathbb{P}_{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_m}$

$\shortparallel$

$\{(S_1, \ldots, S_m)\}$

набор гиперповерхностей

$$R_{n,d_1,\ldots,d_m} = \{(S_1, \ldots, S_m) \mid \bigcap_\nu S_\nu \neq \emptyset\}$$

$\cap$

$\mathbb{P}_{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_m}$

Факт! $R_{n,d_1,\ldots,d_m}$ алгебраическое проектив

Результантное
многообразие

ное многообразие

Пример: $m = n+1 \quad d_1, \dots, d_{n+1} = 1$

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n+1,0}x_0 + \dots + a_{n+1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

есть ненулевое решение $\Longleftrightarrow \det(a_{ij}) = 0$

(система результантов)

$\exists$ набор универсальных уравнений на к-ты многочленов $f_1, \dots, f_m$, которые зависят только от числа переменных $(n+1)$ и набора степеней $d_1, \dots, d_m$:

(1) Уравнения выполняются $\Longleftrightarrow$ система $\{f_\nu = 0\}$ имеет решение в $\mathbb{P}_n$

(2) Каждое уравнение однородно по к-там каждого из многочленов

Док-во: $V(f_1, \dots, f_m) = \varnothing$ в $\mathbb{P}_n$

$V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}^{n+1}$
либо $\varnothing$ либо $0 = (0, \dots, 0)$

$(f_1,\dots,f_m)=(1)$ $\qquad x_i\big|_{V(f_1,\dots,f_m)}=0$

$\Swarrow$

$\exists k:\ x_i^k\in(f_1,\dots,f_m)$

$\forall i=1,\dots,m$

Критерий? $V(f_1,\dots,f_m)=\varnothing \Leftrightarrow$

$(f_1,\dots,f_m)\supset S^dV^*$ при $d\gg0$

$$\boxed{\dim \Bbbk[x_0\dots x_n]/(f_1,\dots f_m)<\infty}$$

$$(f_1,\dots,f_m)\cap S^dV^*=\{g_1f_1+\dots+g_mf_m\}$$

$g_i\in S^{d-d_i}V^*$

$\parallel$

образ линейного отображения

$$\varphi:\ S^{d-d_1}V^*\times\dots\times S^{d-d_m}V^*\longrightarrow S^dV^*$$

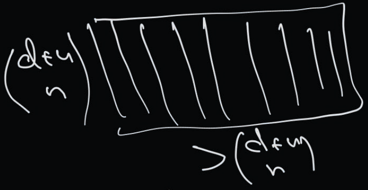
$$(g_1,\dots,g_m)\longmapsto\sum_{i=1}^n f_ig_i$$

$$\sum_{i=1}^m\binom{d-d_i+n}{n} \qquad \binom{d+n}{n}$$

$d\to\infty$

$$\bigcirc\!\!\!\!\!\!\ m\frac{d^n}{n!} \qquad \frac{d^n}{n!}$$

при $d\gg0$ размерность слева становится больше, чем справа.



$S^d V^* \not\subset (f_1, \dots, f_m)$ при таких d

$\Updownarrow$

φ не эпиморфно

$\Updownarrow$

все максимальные миноры $= 0$ – система алгебраических уравнений

$(s_1, \dots, s_m) \mid \bigcap S_\nu \neq \emptyset$

алгебраическое многообразие задаваемое обращением в нуль всех миноров максимального порядка всех матриц φ, отвечающих таким d, что ширина > высоты. (это так при всех $d \gg 0$)

$\Downarrow$

$\exists$ конечная система результантов.