Лекция 24 марта (первая половина)

$\mathrm{Aff}_{\Bbbk}$ аффинные алг. многообразия над $\Bbbk$

$\mathrm{Alg}_{\Bbbk}$ конечно порождённые приведённые $\Bbbk$-алгебры

контрвариантно эквивалентны, если $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$

$$X \subset \mathbb{A}^n \longrightarrow \Bbbk[X] = \frac{\Bbbk[x_1, \dots, x_n]}{\underset{\{f \mid f|_X \equiv 0\}.}{\underset{\shortparallel}{I(X)}}}$$

точки $p \in X$ восстанавливаются по $\Bbbk[X]$

- как гомоморфизмы $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \longrightarrow \Bbbk$

$$f(x) \longmapsto f(p)$$

- как максимальные идеалы $\mathfrak{m}_p \subset \Bbbk[X]$

$$\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$$

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk$$

Замечание $\forall$ $\Bbbk$-алгебры A (не обязательно приведённой) можно организовать множество $\mathrm{Spec}_m A = \{\mathfrak{m} \subset A \mid A/\mathfrak{m} \text{ - поле}\}$

$A/_{m} \cong \mathbb{k}$ если $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$

$a \in A$ является функцией $\underline{a} : \mathrm{Spec}_m A \to \mathbb{k}$

$$m \mapsto [a]_m \in A/_m = \mathbb{k}$$

a - нильпотент $\Rightarrow$ функция $a \equiv 0$ на $\mathrm{Spec}_m \mathbb{k}$

$n(A)$ - нильрадикал - идеал нильпотентов

$\overset{\cap}{\bigcap} m \mid m < A$ - максим.

На самом деле $n(A) = \bigcap m$, $m \in \mathrm{Spec}_m A$.

$$\underline{\underline{A_{red}}} = A/_{n(A)} \simeq \mathbb{k}[X] = \frac{\mathbb{k}[x_1 \dots x_n]}{I(X)}$$

$f \in \mathbb{k}[x_1 \dots x_n]$ задаёт нулевую функцию, то $f \in I(X)$, $[f] = 0$ в $\mathbb{k}[X]$

$a \in A_{red}$ задаёт нулевую функцию на спектре

$\Updownarrow$

$a = 0$ в A_{red}.

$a \equiv 0$ на Spec_m

$a \in n(A)$

$$\mathrm{Alg}_k^{opp} \longleftrightarrow \mathrm{Aff}_k.$$

$\boxed{\text{конечно порождена и приведена}}$

$A \quad B$

$\downarrow$

$A \times B$

(a, b)

$X = \operatorname{Specm} A$

$Y = \operatorname{Specm} B$

$\operatorname{Specm} A \times B$ — копроизведение $X \sqcup Y$

$$X \sqcup Y = \operatorname{Specm}(k[X] \times k[Y])$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$\operatorname{Specm} k[X] \sqcup \operatorname{Specm} k[Y].$$

$k[X] \quad k[Y]$

$k[X] \otimes k[Y]$ — копроизведение в категории Alg_k

$\otimes$ — тензорное произведение векторных пространств.

$$\boxed{(f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2) = f_1 f_2 \otimes g_1 g_2}$$

$$\begin{tikzcd}
k[X] \arrow[r, hook] & k[X] \otimes k[Y] & k[Y] \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

$$f \to f \otimes 1 \qquad 1 \otimes g \leftarrow g$$

$1 \otimes 1$ — единица.

$$\operatorname{Specm}(k[X] \otimes k[Y]) =$$

$$= \operatorname{Specm} k[X] \times \operatorname{Specm} k[Y]$$

$\psi : \mathbb{k}[X]\otimes\mathbb{k}[Y] \longrightarrow \mathbb{k}$ $\psi(p\otimes q) = \varphi_1(p)\varphi_2(q)$

$\updownarrow$ 1:1 $\longleftarrow$ T

$\varphi_1(p) = \psi(p\otimes 1)$

$\varphi_2(q) = \psi(1\otimes q)$

$\varphi_1 : \mathbb{k}[X] \longrightarrow \mathbb{k}$

$\varphi_2 : \mathbb{k}[Y] \longrightarrow \mathbb{k}$

$\longrightarrow \mathbb{k}[X]\times\mathbb{k}[Y] \longrightarrow \mathbb{k}$

$p\otimes q \longmapsto \varphi_1(p)\varphi_2(q)$

билинейное отображение

Лемма $\mathbb{k}[X]\otimes\mathbb{k}[Y]$ – конечнопорождённая приведённая алгебра.

$1, x_1, \dots, x_n$ $1, y_1, \dots, y_m$

$x_i\otimes 1$, $1\otimes y_i$, $\longrightarrow$ порождают как алгебру.

Пример: $k[x]\otimes k[y] = k[x,y]$.

$x^\alpha\otimes y^\beta$ $x^\alpha y^\beta$

$f\neq 0$ $\mathbb{k}[X]\otimes\mathbb{k}[Y] \Longleftrightarrow$ f явл. ненулевой функцией на схеме на $X\times Y$?

$f = \sum f_i\otimes g_i$

$f_i\in\mathbb{k}[X]$ $g_i\in\mathbb{k}[Y]$ – линейно независимые над $\mathbb{k}$

какие-то

$f(p,q)=0\ \forall p,q.$ $\quad \forall p \quad p\times Y \to \Bbbk$

$\forall p\in X \qquad \sum f_i(p)g_i(q)\equiv 0$ по q

$$0=\sum_i f_i(p)\,g_i \in \Bbbk[Y]$$

в $\Bbbk[Y]$ $\qquad \overset{\shortparallel}{0}$ на Y

$\swarrow$

$\forall p \quad f_i(p)=0 \Rightarrow$ все $f_i=0$ в $\Bbbk[X]$

$\Downarrow$

$f=0.$

$$\boxed{\Bbbk[X\times Y]=\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]}$$

На всяком алг. многообразии имеется каноническая топология Зарисского

$\Bbbk[X]\supset I \qquad V(I)\subset X$

$\{p\in X \mid f(p)=0\ \forall f\in I\}$

алгебраические подмногообразия в X

Утв. Множества $V(I)$ суть замкнутые множества топологии.

(1) $\emptyset = V((1))$

(2) $X = V((0))$

идеал, порождённый всеми идеалами I_α.

(3) $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$

$$\sum_\alpha I_\alpha = \{f_{i_1} + \dots + f_{i_k}\} \quad \boxed{f_{i_k} \in I_{i_k}}$$

(4) $\underline{V(I) \cup V(J)} =$

$= V(IJ) = V(I \cap J)$

идеал, порождённый всеми fg, $f \in I, g \in J$

В листочке есть задача! (!)

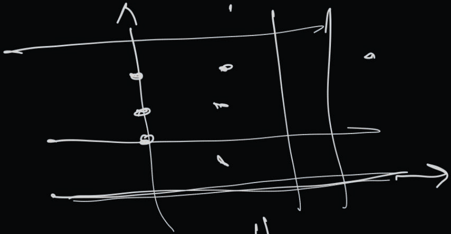
Предупреждение Топ. Зар. далека по своим свойствам от метрической топологии.

$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Specm}\,\Bbbk[x]$ топология Зарисского дискретна,

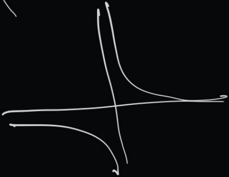
Топология Зарисского на $\underline{X \times Y}$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и на Y.

$= \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathrm{Specm}\,\Bbbk[x]$

$\mathbb{A}^2$



$V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2$



Приводимость X наз. приводимым

если $X = X_1 \cup X_2$ где $X_1 \subsetneq X$
$X_2 \subsetneq X$
замкнуты.

аффинное многообразие X неприводимо

$\Updownarrow$

$\mathbb{k}[X]$ без делителей нуля.

$\underline{f \neq 0, g \neq 0}$ $fg = 0$ $X = \underset{\substack{\nparallel \\ X}}{V(f)} \cup \underset{\substack{\nparallel \\ X}}{V(g)}$

$\underline{X = X_1 \cup X_2} \quad X_1, X_2 \neq X$

$\exists f \in k[X] \quad f \in I(X_1)\ , \ f \neq 0$

$\exists g \in k[X] \quad g \in I(X_2)\ , \ g \neq 0$

$fg \equiv 0$ на X $\Rightarrow$ $fg = 0$ в $k[X]$.

Теорема Всякое аффинное алгебраическое многообразие X является объединением

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

конечного числа неприводимых.

Если $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$, то такое разложение единственно (с точностью до перестановки компонент).

Док-во: $\dfrac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} = k[X]$ нётерово

$X_1 \cup X_2 = X$

если какие-то X_i приводимы представим каждое в виде объединения 2х

- либо через конечное число шагов все компоненты будут неприводимы
- либо $\exists$ бесконечная цепочка вложенных замкнутых подмножеств $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \dots$

$I(X_1) \subsetneq I(X_2) \subsetneq \dots$

невозможно в нётеровом кольце

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$$

$$\boxed{X_i \not\subset X_j} \qquad Y_i \not\subset Y_j$$

$X_1 \subset \bigcup Y_i$

$X_1 = \bigcup (X_1 \cap Y_i) \Rightarrow \exists Y_j : X_1 \subset Y_j$

т.к. X_1 неприводимо

$\exists X_k : Y_j \subset X_k$.

$X_1 \subset Y_j \subset X_k \Rightarrow X_1 = X_k = Y_j$

будем считать, что $X_1 = Y_1$

$$\underline{X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = X_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m}$$

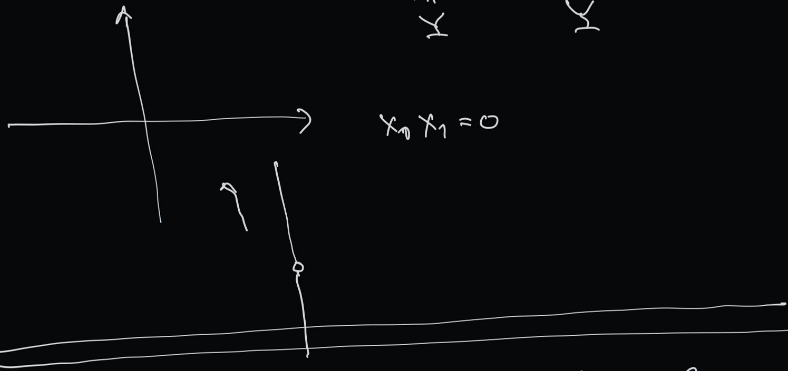
$$\Downarrow$$

$$\underset{(X_2 \setminus X_1) \cup (X_3 \setminus X_1)}{\underline{X_2 \cup \dots \cup X_n}} = \underset{(Y_2 \setminus X_1) \cup (Y_3 \setminus X_1)}{\underline{Y_2 \cup \dots \cup Y_m}}$$

$Z \subsetneq Y \subset X$ Z и Y замкнуты
и Y неприводимо

Y однозначно восстанавливается у $\overline{Y \setminus Z}$ как $Y = \overline{Y \setminus Z}$

$$Y = \underset{\underset{Y}{\neq}}{Z} \cup \underset{\underset{Y}{\shortparallel}}{\overline{Y \setminus Z}}$$



Если X неприводимо, то любые два открытые $\overset{\neq\emptyset}{U}, \overset{\neq\emptyset}{W} \subset X$ имеют $U \cap W \neq \emptyset$.

$$X = \underset{\text{замк}}{(X \setminus U)} \cup \underset{\text{замк.}}{(X \setminus W)} \text{ если } U \cap W = \emptyset$$

Топология Зарисского не хаусдорфова.