Лекция 17 марта (вторая половина)

Предупреждение: если k не замкнуто, то есть максимальные идеалы, которым не отвечают гомоморфизмы $A \to k$

$$\boxed{\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}} \quad \mathrm{ev}_i \qquad i \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{ev}_i : f(x) \longrightarrow f(i)$$

$$\mathrm{Ker} : (x^2+1)$$

↑

макс. идеал, т.к. $\mathbb{R}[x]/_{x^2+1} \simeq \mathbb{C}$ поле.

но нет никакого гомоморфизма $\mathbb{R}[x] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ с таким ядром

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \varphi = 1.$$

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} (x^2+1) = 2$$

Не все максим. идеалы в алгебре A над незамкнутым полем $\Bbbk$ реализуются как ядра гомоморфизмов $A \to \Bbbk$

Факт 2 $\forall$ аффинного алг. многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ точки $p \in X$ находятся в биекции с гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, $(1 \mapsto 1)$ (если поле $\Bbbk$ алг. замкнуто)

$\|$

с максимальными идеал. $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$.

$$p \longmapsto ev_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk \longrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(ev_p)$$

$$\mathfrak{m}_p = \{ f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0 \}$$

$$\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p = \Bbbk \qquad \boxed{X \subset \mathbb{A}^n}$$

$\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$ любой макс. идеал. Как найти

$p \in X : \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \arrow[r, two heads] & \dfrac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} \\ \tilde{\mathfrak{m}} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \mathfrak{m} \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

полный? прообраз.

$$\frac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{\tilde{\mathfrak{m}}} \cong \frac{\mathbb{k}[X]}{\mathfrak{m}} \cong \mathbb{k}$$

$\tilde{\mathfrak{m}}$ – максимальный идеал. По слабой теореме о нулях $V(\tilde{\mathfrak{m}}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists p :$ $f(p) = 0 \ \forall f \in \tilde{\mathfrak{m}} \Rightarrow \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ т.к. $\mathfrak{m}$ – максимален.

$X \simeq \mathrm{Spec}_m \mathbb{k}[X]$

множество максимальных идеалов

Пример 1: $\mathbb{k}[x]$ $\quad \varphi : \mathbb{k}[x] \longrightarrow \mathbb{k}$

$ev_\alpha : x \longmapsto \alpha \in \mathbb{k}$

$\mathrm{Spec}_m(\mathbb{k}[x]) = \mathbb{A}^1 \quad \mathfrak{m}_\alpha = (x - \alpha)$

Пример 2: $\Bbbk[x,x^{-1}]$ полиномы Лорана

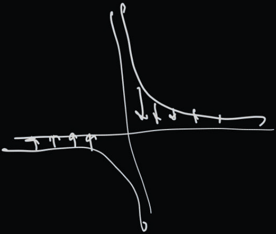
$$\varphi : \Bbbk[x,x^{-1}] \longrightarrow \Bbbk$$

$$ev_\alpha : x \longmapsto \underset{\neq 0}{\alpha} \in \Bbbk^*$$

$$\mathfrak{m}_\alpha = (x-\alpha)$$

$$\mathrm{Spec}_m(\Bbbk[x,x^{-1}]) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

$$\rotatebox{90}{=} \quad \frac{\Bbbk[x,y]}{(xy-1)} \longleftarrow \text{координатная алгебра гиперболы } (xy=1) \subset \mathbb{A}^2$$



Теорема Функтор $X \longmapsto \Bbbk[X]$ является эквивалентностью категорий

$$\mathrm{Aff}_\Bbbk^{opp} \longrightarrow \mathrm{Alg}_\Bbbk$$

Критерий

(1) по существу сюрьективен

(2) вполне строг.

(1) всякая конечно-порождённая алгебра без нильпотентов изоморфна алгебре вида $\Bbbk[X]$ для некоторого афф. алг. многообразия X.

$$\boxed{A = \frac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}{I}}$$

нет нильпотентов

$$f^n \in I \Rightarrow f \in I$$

$$\sqrt{I} = I$$

$$I(V(I)) = I$$

идеал многообразия

$X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$

$$\psi^* \qquad\qquad \psi$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aff}_\Bbbk}(X,Y) \arrow[r, shift right, "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X]) \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

(2)

$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd}$$

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

$$X \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Spec}_m \Bbbk[X] = \{ f : \Bbbk[X] \to \Bbbk \}$$

$$Y \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Spec}_m \Bbbk[Y] = \{ g : \Bbbk[Y] \to \Bbbk \}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\ \psi : \Bbbk[Y] \arrow[r] & \Bbbk[X] \arrow[d, "f"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd}$$

$\psi^* f = f \circ \psi \longleftarrow$

$$\mathrm{Spec}_m \Bbbk[X] \longrightarrow \mathrm{Spec}_m \Bbbk[Y]$$

$\varphi^{\#\#} = \varphi$ $\quad \forall \varphi : X \to Y$

$\forall \psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$

проверить!

$A \longrightarrow \mathrm{Spec}_m A$ = множество макс. идеалов

$\|$ если $\Bbbk$ замкнуто

множество гом-в $A \to \Bbbk$

$1 \mapsto 1$

"

[точки алгебры A со значениями в $\Bbbk$

place

$a \in A$ канонически задаёт функцию на $\mathrm{Spec}_m A$,

$$a(m) := [a]_m \in A/m \simeq \Bbbk$$

Зам: $a \in A$ нильпотентен $\Longleftrightarrow$ он задаёт тождественно нулевую функцию на спектре

$$n(A) = \{ a \in A \mid a^n = 0 \text{ для некот. } n \in \mathbb{N} \}$$

(нильрадикал алгебры A)

$$n(A) = \bigcap_{m \in \mathrm{Spec}_m A} m$$

Док-во: $n(A)$ - идеал $\quad a^k = 0 \quad b^m = 0$

$$(a+b)^{k+m-1} = 0$$

$B = A/n(A)$ - приведённая алгебра.

алгебра функций на алгебраическом многообразии.

$a \in n(A)$ то a задаёт нулевую функцию на $\mathrm{Spec}_m A$

функция $\mathrm{Spec}_m A \longrightarrow \Bbbk$ принимает значения в поле и не может быть нильпотентна. $\Longrightarrow a \in \bigcap_{m \in \mathrm{Spec}_m A} m$.

если $a \in \bigcap_{m \in \mathrm{Spec}_m A} m$

$$\boxed{\mathrm{Spec}_m A = \mathrm{Spec}_m B}$$

$$A \longrightarrow B$$