Лекция 17 марта (первая половина)

Аффинная алг. геометрия

$\mathbb{A}^n(\mathbb{k})$ $\mathbb{k}$ - алгебраически замкнуто (классическая алг. геометрия).

↑

аффинное координатное пр-во

Аффинное алг. многообразие — это множество решений системы полиномиальных уравнений

$$\{ f_\nu(x_1,\dots,x_n)=0 \}, \quad f_\nu \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$$

Зам. 1 Не меняя мн-во решений можно добавить в систему все её следствия вида $g_1 f_1 + \dots + g_m f_m = 0$

$f_1=0 \dots f_m=0$ - ур-я у системы

$g_1,\dots,g_m \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ - любые.

Всегда можно считать, что уравнения системы составляют идеал $I \subset \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$

Каждому идеалу $I \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$

сопоставляется $V(I) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in I \ f(p) = 0\}$

Зам 2. Т.к. $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ – нётерово, любой идеал $I \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ имеет вид $I = (f_1, \dots, f_m) \Rightarrow V(I) = V(f_1, \dots, f_m)$

Любая система полиномиальных уравнений эквивалентна конечной подсистеме.

$\forall$ фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ можно образовать

$\parallel$

множество точек

идеал $I(\Phi) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f|_{\Phi} \equiv 0\}$

$\forall$ алг. многообразия $V(J) \subset \mathbb{A}^n$

$$I(V(J)) \supset J$$

включение строгое (!)

Пример: $\mathbb{A}^1$ $\quad J = (x^2)$ $\quad x^2 = 0$

одна точка $\{0\}$

$$I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2)$$

Сильная теорема Гильберта о нулях

(Nullstellensatz)

Если поле $\Bbbk$ алг. замкнуто и $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ зануляется на $V(J)$, то $\exists n \in \mathbb{N} : f^n \in J$

Док-во: Слабая теорема о нулях:

$$V(J) = \emptyset \iff J = (1)$$

Можно считать, что $V(J) \neq \emptyset$.

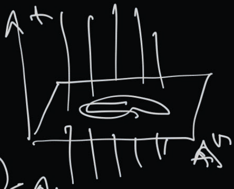
гиперплоскость $t=0$

Пусть $J = (g_1, \dots, g_m)$

Вложим $\mathbb{A}^n \, (x_1, \dots, x_n) \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1} \, (t, x_1, \dots, x_n)$

$$\Bbbk[x_1, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$$

$\tilde{V}(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ это цилиндр



Пусть $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ тождественно нулевая на $V(J) \subset \mathbb{A}^n$

$h = 1 - \underline{tf} \in \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ $\quad h \equiv 1$ на $\underset{\mathbb{A}^{n+1}}{\underset{\cap}{\tilde{V}(J)}}$

$$V((J, h)) = \emptyset \Rightarrow (J, h) = (1)$$

т.е. $\exists f_0(t,x), f_1(t,x), \ldots, f_m(t,x) \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$

$$f_0(t,x)\cdot h(t,x) + f_1(t,x)\cdot g_1(x) + \ldots + f_m(t,x)\cdot g_m(x) = 1$$

$$\varphi : k[t, x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k(x_1, \ldots, x_n)$$

$$t \longrightarrow 1/f(x)$$

$$x_i \longrightarrow x_i$$

φ

$$f_0\left(\frac{1}{f(x)}, x\right)\cdot \underbrace{\left[1 - \frac{1}{f}\cdot f\right]}_{0} + f_1\left(\frac{1}{f(x)}, x\right) g_1(x) + \ldots + f_m\left(\frac{1}{f(x)}, x\right) g_m(x) = 1$$

$$f_1\left(\frac{1}{f}, x\right) g_1(x) + \ldots + f_m\left(\frac{1}{f}, x\right) g_m(x) = 1$$

тут присутствуют знаменатели

$J(g_1, \ldots, g_m) \neq (1) \Longrightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}$: умножение на f^N убивает знаменатели.

$$\boxed{\tilde{f}_1(x)\, g_1(x) + \ldots + \tilde{f}_m(x)\, g_m(x) = f^N}$$

Следствие: $I(V(J))$ — это радикальный идеал.

$\parallel$

$\sqrt{J}$

$\sqrt{J} = \{ f \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] \mid \exists m : f^m \in J \}$

это всегда идеал.

$f^m \in \sqrt{J} \Rightarrow f \in \sqrt{J}$ $\quad \sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J}$

$\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}$ – категория аффинных алгебраических многообразий.

$X \subset \mathbb{A}^n$ – объекты, n – любое.

$X \subset \mathbb{A}^n \qquad \underline{Y \subset \mathbb{A}^m}$

алг. морфизм $X \xrightarrow[\varphi]{} Y$ (морфизм алг. многооб. регулярное отобр.)

отображение множеств, которое в координатах задаётся правилом

$$(x_1,\dots,x_n) \xmapsto{\varphi} (\varphi_1(x_1,\dots,x_n), \dots, \varphi_m(x_1,\dots,x_n))$$

где $\varphi_i(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$

функтор $\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}} \longrightarrow Alg_{\mathbb{k}} \leftarrow$ конечно порождённые приведённые комм. $\mathbb{k}$-алгебры

приведённость = отсутствие нильпотентов.

$X = V(J) \subset \mathbb{A}^n$ ⟶ координатная алгебра многообразия X

$\parallel$

функции $X \to \mathbb{k}$, которые являются ограничениями на X полиномов $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$

$\parallel$

$$\frac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{I(X)} \qquad I(X) = \{f \mid f|_X \equiv 0\}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sqrt{J}$$

↑

конечно порождённая приведённая $\mathbb{k}$-алгебра

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n \arrow[r, phantom, "\supset"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{A}^m \\
& & \mathbb{k} &
\end{tikzcd}$$

$(x_1 \dots x_n) \mapsto (\underline{\varphi_1(x)}, \dots, \underline{\varphi_m(x)})$

$\varphi^* f = \underline{f} \circ \varphi : X \to \mathbb{k}.$

$\varphi^* f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ – регулярная (полиномиальная) функция на X.

$\varphi^* : \underline{\mathbb{k}[Y]} \to \underline{\mathbb{k}[X]}$

$X \longmapsto \mathbb{k}[X]$ задаёт контравариантный функтор

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{k}} \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathbb{k}}$$

Зам. 1 : $\forall$ отображение множеств

$$X \xrightarrow{\varphi} Y$$

$\exists$ поднятие $\varphi^*: \Bbbk^Y \longrightarrow \Bbbk^X$

$$\Bbbk^Y = \{Y \to \Bbbk\} \qquad \Bbbk^X = \{X \to \Bbbk\}$$

в геом. теории выделяется подалгебра регулярных функций $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk^Y$

$\Bbbk[X] \subset \Bbbk^X$

отобр. $\varphi: X \to Y$ наз. регулярным, если

$\varphi^*: \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$

(метаматематическое определение).

Упр: отображение φ топологических многообразий? непрерывно $\Longleftrightarrow$ φ^* переводит непрерывные функции $Y \to \mathbb{R}$ в непрерывные функции $X \to \mathbb{R}$

Утв: $\varphi: X \longrightarrow Y$ между аффинными алгебраическими многообразиями регулярно $\Longleftrightarrow$ $\underline{\varphi^* : \Bbbk[Y] \longrightarrow \Bbbk[X]}$.

$\Bbbk[Y]$ порождается координатными функциями $y_1, \dots, y_m : \mathbb{A}^m \longrightarrow \Bbbk$

$Y \subset \mathbb{A}^m (y_1, \dots, y_m)$

$X \subset \mathbb{A}^n (x_1, \dots, x_n)$

$$\varphi : X \longrightarrow Y \quad (x_1, \dots, x_n) \to (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$$

многочлен

$$\varphi^* y_i = \underline{\varphi_i(x_1, \dots, x_n)} \searrow \Bbbk$$

если $\varphi^* y_i \in \Bbbk[X]$ отображение $X \to Y$ задаётся полиномами.

Зам. Множество точек многообразия X однозначно восстанавливается (как множество) из алгебры $\Bbbk[X]$

$$p \in X \rightsquigarrow ev_p : \Bbbk[X] \longrightarrow \Bbbk$$
$$f(x) \longmapsto f(p)$$

вычисление функции в точке

$ev_p(1) = 1.$ $\Rightarrow$ сюръективен.

A - любая $\Bbbk$-алгебра $\longrightarrow$ Множество гомоморфизмов $\Bbbk$-Алгебр

$$A \to \Bbbk$$
$$1 \mapsto 1$$

$\varphi: A \to \Bbbk$ - сюрьективный гомоморфизм

$\Bbbk \cong A/\ker\varphi$ $\quad$ $\ker\varphi \subset A$ - максимальный идеал.

конечно порожд. $\Bbbk$-алг.

$\mathfrak{m} \subset A$ - максим. идеал

конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра

$$\varphi_{\mathfrak{m}} : A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$$

поле

Если $\Bbbk$ алг. замкнуто, то это равенство

Факт 1

Над алг. замкнутым полем $\forall$ конечно порождённой $\Bbbk$-алгебры A имеется биекция

гом-мы, переводящие $1 \mapsto 1$

$$\mathrm{Spec}_m(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk)$$

множество максимальных идеалов

$$\ker\varphi \longleftarrow\!\shortmid \; \varphi: A \to \Bbbk$$
$$\Bbbk = A/\ker\varphi$$

и всегда есть $\longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \varphi_{\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m} = \Bbbk$

поле замкнуто