Лекция 10 марта (вторая половина)

Следствие Слабая теорема Гильберта о нулях

$\Bbbk$ - алгебраически замкнутое поле

$f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[x_1, \dots x_n]$

$I = (f_1, \dots, f_m)$

Либо система полиномиальных уравнений $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$ имеет решение в $\Bbbk^n$

либо $I = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ $\quad (I = (1))$

$$\exists g_1, \dots, g_m \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] : \sum g_i f_i = 1$$

если $I \subsetneq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ - собственный идеал

то $\exists$ точка $p \in \Bbbk^n$: $f(p) = 0 \ \forall f \in I$.

Будем строить p.

шаг 1: $\exists$ максимальный идеал $m \subsetneq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$

$m \supset I$. Заменим I на m.

шаг 2

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\dfrac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}{m}} \\ \Bbbk \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

— поле, содержащее $\Bbbk$ и конечно-порождённое как $\Bbbk$-алгебра

⇒ алгебраична над $\Bbbk$ ⇒ $\dfrac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}{m} = \Bbbk$

$\Bbbk \nearrow$ как константы

$\xi \in \dfrac{\Bbbk[x_1 \dots x_n]}{m}$ является корнем неприводимого прив. многочлена.

$\xi - \alpha = 0 \quad \alpha \in \Bbbk$

$\Rightarrow \xi = \alpha$.

шаг 3. (1) означает, что каждый многочлен сравним с константой по mod m

Пусть p_i — константа, сравнимая с x_i mod (m)

$\Bbbk^{\nearrow}$

$(p_1,\dots,p_n)$ — решение системы.

$\boxed{f \in m}$ $\quad f(p_1,\dots,p_n) \equiv f(x_1,\dots,x_n) \mod m$

$$\|$$

$$0$$

Базисы трансцендентности

A – целостная (= без делителей нуля) конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра.

$\Bbbk[a_1,\dots,a_n] = \operatorname{im}(ev_{a_1,\dots a_n} : \Bbbk[x_1,\dots,x_n] \to A)$

наименьшая $\Bbbk$-подалгебра содержащая $a_1,\dots,a_n$.

$\Bbbk(a_1,\dots,a_n)$ – наименьшее поле содержащее $a_1,\dots,a_n$.

$\|$

$Q_{\Bbbk[a_1,\dots a_n]}$ – поле частных алгебры $\Bbbk[a_1,\dots a_n]$

$a_1,\dots,a_n$ алг. независимы $\overset{\text{def}}{\iff}$ $ev_{a_1,\dots a_n}$ – изоморфизм.

$\Bbbk[a_1,\dots,a_n] \simeq \Bbbk(x_1,\dots,x_n]$

$\Bbbk(a_1,\dots a_n) \simeq \Bbbk(x_1,\dots,x_n)$.

$a_1,\dots,a_n$ алгебраически порождают A, если A алгебраично над $\Bbbk(a_1,\dots,a_n)$.

В этом случае Q_A тоже алгебраично над $\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)$. Надо взять целое замыкание $\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)$ в Q_A.

Оно содержит $A \subset \overline{\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)}_{Q_A} \subset Q_A$ — поле

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)}_{Q_A} \\ \mathbb{k}(a_1,\dots,a_n) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

целое → $\cup$

$\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)$ — поле

$\Leftarrow$ расширен

$$\overline{\mathbb{k}(a_1,\dots,a_n)}_{Q_A} = Q_A$$

Набор алгебраически независимых алгебраически порождающих элементов называется базисом трансцендентности

$\parallel$

Максимальный по включению алгебраически независимый набор элементов $a_1,\dots,a_n$

$f(a_1,\dots,a_n,b)=0 \quad \forall b \neq a_i$

$b^n\cdot \underline{p_n(a_1\dots a_n)}+b^{n-1}p_{n-1}(a_1\dots a_n)+\dots+p_0(a_1\dots a_n)$

$\|$

минимальный по включению алгебраически порождающий набор

$a_1,\dots,a_n$

$f(a_1,\dots,a_n)=0 \Leftarrow$ присутствует a_1

a_1 – алгебраичен над $\underline{\underline{\Bbbk(a_2,\dots,a_m)}}$

$a_2,\dots,a_m$ – алгебраически порождают A.

Теорема о базисе (трансцендентности)

В конечно порождённой алгебре все базисы трансцендентности имеют одинаковую мощность. Любой алгебраически порождающий набор содержит базис, любой алгебраически независимый набор можно дополнить до базиса.

Ключевая лемма - лемма о замене.

Пусть $a_1,\dots,a_m$ алгебраически порождают A, а $b_1,\dots,b_n$ - алг. независимы. Тогда $n \le m$ и элементы a_i можно так перенумеровать, что

$$b_1,\dots,b_n,a_{n+1},\dots,a_m$$

алгебраически порождают A.

Док-во: b_1 удовл. соотношению

$$f(b_1,a_1,\dots,a_m)=0$$

сюда входит какое-то a_i, скажем, это a_1. $\Downarrow$

a_1 алгебраичен над $\underline{\mathbb{k}(b_1,a_2,\dots,a_m)}$

Пусть $b_1,\dots,b_i,a_{i+1},\dots a_m$ алгебраически порождают A и $i<n$. $\exists$ соотношение

$$0=f(b_{i+1},b_1,\dots,b_i,a_{i+1},\dots,a_m)$$

$\nearrow$ сюда входит какое-то $a \Rightarrow i < m$

пусть входит a_{i+1}

$\Downarrow$

a_{i+1} алгебраичен над $\Bbbk(b_1,\dots,b_{i+1},a_{i+2},\dots a_n)$

$\Downarrow$

$b_1,\dots,b_{i+1},a_{i+2},\dots a_n$

алг. порождают A над $\Bbbk$

Следствие — равномощность базисов.

$a_1,\dots a_n$ порождают, и есть зависимость

$f(a_1,\dots a_n)=0$ содержащая $a_1 \Rightarrow$

a_1 можно выкинуть

набор $a_2,\dots a_n$ останется порождающим

$b_1,\dots,b_n$ алг. независимы, но не порождают $\Rightarrow \exists\, a$! $a, b_1,\dots,b_m$ тоже алг. независимы без конца продолжать не может в силу леммы.

$\mathrm{tr\,deg}_{\Bbbk} A$ - число элементов в базисе трансцендентности A над $\Bbbk$.

Пример: Теореме Люрота.

$A = \Bbbk(t)$ поле рациональных функций от одной переменной.

$\varphi \in \Bbbk(t)$ $\varphi \neq \mathrm{const}$.

трансцендентна над $\Bbbk$ $\varphi(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$

t - является корнем многочлена

$\underline{\varphi q(x) - p(x)} \in \Bbbk(\varphi)[x]$

t алг над $\Bbbk(\varphi)$ φ алгебраичен над $\Bbbk \Rightarrow$ t алгебраичен

$$\boxed{\Bbbk(\varphi) \simeq \Bbbk(t).}$$

$$\varphi \longrightarrow t$$

$\Bbbk(\varphi) \subset \Bbbk(t)$ конечное (алгебраическое) расширение

$\mathbb{k} \neq A \subset \mathbb{k}(t)$ такая A имеет степень трансцендентности 1

A алгебраична над $\mathbb{k}(\varphi)$ $\forall\, \varphi \in A$, $\varphi \neq \text{const}$

В следующий раз — аффинная алгебраическая геометрия над алг. замкнутым полем

конечно порождённые приведённые $\mathbb{k}$-алгебры $\Longleftrightarrow$ Категория аффинных алгебраических многообр.

приведённые " без нильпотентов

имеется контравариантная эквивалентность категорий

$$\boxed{\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}}$$

$$\xleftarrow{\quad \mathrm{Hom}(*,\, \mathbb{A}^1) \quad}$$

$$\xrightarrow[\quad \mathrm{Hom}(*,\, \mathbb{k}) \quad]{}$$