Лекция 10 марта (первая половина)

$A \subset B$ — расширение коммутативных колец

- целые над A элементы B образуют подкольцо $\bar{A}_B \subset B$
- в расширении $C \supset B \supset A$ целые над $\bar{A}_B$ элементы C целы и над A
- если B цело над A, то
  - B поле $\Rightarrow$ A – поле
  - A поле и в B нет делителей нуля $\Rightarrow$ B поле

- Лемма Гаусса-Дедекинда-Кронекера

$A \subset B$ расширение колец, $f, g \in B[t]$ – два приведённых многочлена. Тогда все коэфф-ты произведения $h(x) = f(x)g(x)$ целы над A $\Leftrightarrow$ все к-ты и у f, и у g целы над A. [классическая лемма Гаусса получается $B = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$]

Док-во: $f, g \in \overline{A}_B[x] \Rightarrow h \in A_B[x]$

($\Leftarrow$) ∀ приведённого многочлена $f \in B[x]$ $\deg f > 0$ ∃ кольцо $C \supset B$: $f(x) = \prod_i (x - c_i)$ в $C[x]$, где $c_i \in C$.

Док-во: индукция по $\deg f$.

$F = \frac{B[x]}{(f)}$ $B < F$ – классы констант

$c_1 \neq c_2 + f \cdot g$ $\deg f \geq 1$

в F у $f(x)$ есть корень $c = [x]_f \Rightarrow$

$f(x) = (x - c) f_1(x)$ в $F[x]$

по индукции $f_1(x) = \prod (x - c_i')$

Док-во леммы Гаусса: возьмём $C \supset B$:

$f(x) = \prod_i (x - a_i)$ $g(x) = \prod (x - b_i)$

$a_i, b_i \in C$

$h(x) = \prod_i (x - a_i)(x - b_i)$

$h \in \overline{A}_B \Rightarrow a_i$ и b_i целые над $\overline{A}_B \Rightarrow a_i$ и b_i целые над A

все к-ты и у f и g $\Leftarrow$

целые над A

Устройство конечно порождённых алгебр над полем $\underline{\underline{\Bbbk}}$ (любым)

$\Bbbk$-алгебра A наз. конечно порождённой, если $\exists$ эпиморфизм $\Bbbk[x_1,\dots,x_n] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$

$a_1=\pi(x_1),\dots,a_n=\pi(x_n)$ наз. образующими алгебры, идеал $\underline{\ker(\pi) \subset \Bbbk[x_1,\dots,x_n]}$ — **идеалом соотношений**.

Элементы $a_1,\dots,a_n$ алгебры A наз. алгебраически зависимыми, если гомоморфизм вычисления $ev_{a_1\dots a_n}: \Bbbk[x_1\dots x_n] \to A$

$$f(x_1,\dots,x_n) \to f(a_1,\dots,a_n)$$

имеет ненулевое ядро. Если $\ker ev_{a_1\dots a_n}=0$ то $a_1,\dots,a_n$ наз. алгебраически независимыми.

Пример $\boxed{n=1}$. $a\in A$ $\quad ev_a: \Bbbk[x] \longrightarrow A$

$$f(x) \longrightarrow f(a).$$

если a алгебраически независим (=трансцендентен), то $\underline{ev_a : \mathbb{k}[x] \hookrightarrow A}$ – инъективен.

$\mathbb{k}[a]$ – наименьшая подалгебра, содержащая 1 и a.

$\mathbb{k}[a] = \mathrm{im}\, ev_a$

a – трансцендентен, то $\mathbb{k}[a] \simeq \mathbb{k}[x]$

она (1) не поле (2) бесконечномерна как векторное пр-во над $\mathbb{k}$

Если $\ker ev_a \neq 0$, a наз. алгебраическим

$$\mathbb{k}[a] = \frac{\mathbb{k}[x]}{\ker ev_a} \qquad \begin{array}{l} \ker ev_a \subset \mathbb{k}[x] \\ \quad \parallel \\ \ (\mu_a) \end{array}$$

$\mu_a(x)$ – приведённый многочлен наименьшей степени, который аннулирует a (минимальный многочлен элемента a).

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[a] = \deg(\mu_a)$$ конечна.

$$= \boxed{\frac{\mathbb{k}[x]}{(\mu_a)}}$$

$\mathbb{k}[a]$ – поле $\iff$

$\iff$ μ_a неприводим.

(Th) Если конечно-порождённая $\Bbbk$-алгебра A является полем, то все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$.

Док-во: индукция по числу образующих.

$$A = \frac{\Bbbk[a]}{(f(a))}$$ уже разобран.

Индуктивный переход: A порождается эл-тами $a_1, \dots, a_m$

Если a_m — цел над $\Bbbk$.

$\Bbbk(a_m)$ — наименьшее подполе содержащее $1, a_m$

$$\Bbbk(a_m) = \Bbbk[a] = \frac{\Bbbk[x]}{(\mu_a)}$$ — нет делителей нуля

$\cap$ A-поле $\Uparrow$ μ_a — неприводим

если a_m цел (алгебраичен) над $\Bbbk$, то $\Bbbk[a] = \Bbbk(a_m)$ $A \supset \Bbbk(a_m)$ и порождается над $\Bbbk(a_m)$ эл-тами $a_1, \dots, a_{m-1}$ $\Longrightarrow$ по индукции A цела над $\Bbbk[a_m]$ $\Longrightarrow$ A цела над $\Bbbk$,

---

Достаточно проверить, что a_m не трансцен.

тен. Пусть a_m трансцендентен.

$$ev_{a_m}: \underline{\underline{\mathbb{k}[x]}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[a_m] < \mathbb{k}(a)$$

продолжается до изоморфизма полей

$$ev_{a_m}: \mathbb{k}(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}(a_m)$$

↗ поле частных кольца $\mathbb{k}[x]$

A порождается над $\mathbb{k}(a_m)$ элементами $a_1, \dots, a_{m-1}$. По индукции они алгебраичны над $\mathbb{k}(a_m)$

$$a_i^n - \frac{p_{n-1}(a_m)}{q_{n-1}(a_m)} a_i^{n-1} - \dots - \frac{p_0(a_m)}{q_0(a_m)} = 0$$

можно домножить на общий знаменатель

$$\boxed{s_n} a_i^n - s_{n-1} a_i^{n-1} - \dots - s_0 = 0 \qquad m-1 \text{ уравнений}$$

можно домножить уравнения на многочлены так, чтобы все старшие к-ты стали одинаковыми и равными

$p(a_m) \in \Bbbk[a_m]$

$\parallel$

НОК всех старших к-тов.

A :

$\cup$

Тогда A цела над подалгеброй $\Bbbk[a_m, \frac{1}{p(a_m)}]$

A - поле $\Rightarrow$ $\Bbbk[a_m, \frac{1}{p(a_m)}]$ - поле.

$1+p(a_m)$ - не обратим в $\Bbbk[a_m, \frac{1}{p(a_m)}]$

пусть $\exists$ обратный, т.е. $\exists$ $f(x,y) \in \Bbbk[x,y]$:

$$(1+p(a_m))\, f\left(a_m, \frac{1}{p(a_m)}\right) = 1$$

запишем $f\left(x, \frac{1}{p(x)}\right) = \frac{h(x)}{p^n(x)}$ и $p \nmid h$

$\in$

$\Bbbk(x)$

$$(1+p(a_m))\, \frac{h(a_m)}{p^n(a_m)} = 1$$

$$\boxed{(1+p(a_m))\, h(a_m) = p^n(a_m)}$$

уравнение на $\underline{a_m}$

$\uparrow$ ненулевой многочлен

Сл. Всякое поле, которое конечно порождено как алгебра над $\Bbbk$, конечномерно как векторное пр-во над $\Bbbk$.

$$A = \Bbbk[a_1, a_2] = \Bbbk(a_1)\boxed{[a_2]}$$

$$\nearrow$$

$$\Bbbk[a_1] = \frac{\Bbbk(x)}{\mu} \quad \text{конечномерно}$$

линейно порождает $\xi_1 \dots \xi_n$

$\Bbbk(a_1, a_2)$ порождается над $\Bbbk(a_1)$ линейно порождается $\eta_1 \dots \eta_m$

$$\boxed{\lambda_1}\eta_1 + \dots + \boxed{\lambda_m}\eta_m$$

$\Bbbk$-линейные комбинации $\xi_1 \dots \xi_n$

$$\Downarrow$$

$\Bbbk[a_1, a_2]$ линейно порождается над $\Bbbk$ произведениями $\xi_i \eta_j$