Лекция 3 марта (вторая половина)

Приложение к теории представлений:

Теорема: Пусть конечная группа G содержит нормальную абелеву подгруппу $A \triangleleft G$.

Тогда размерность любого комплексного неприводимого представления

$$\rho : \mathbb{C}[G] \longrightarrow \mathrm{End}(W)$$

делит $[G:A]$, т.е. $\dim W \mid [G:A]$.

Док-во: шаг 1. $A = \{e\}$

надо доказать, что $\dim W \mid |G|$.

$\frac{|G|}{\dim W}$ - целое число

$\curvearrowleft$ $\mathbb{Q}$

Замечание $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$, если $q \in \mathbb{Q}$ цел. над $\mathbb{Z}$ то $q \in \mathbb{Z}$.

$$q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

$$q = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \underbrace{\alpha^n}_{\text{нет}} + \underbrace{a_1 \alpha^{n-1}\beta + \ldots + a_n \beta^n}_{\text{делится на } \beta} = 0$$

$\Leftarrow$ $\beta = 1$

$$\boxed{\text{То же самое верно для любого факториального кольца } A \text{ и поля его частных } Q_A\text{! } A \text{ целозамкнуто в } Q_A}$$

Надо проверить, что $\frac{|G|}{\dim W}$ цел над $\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Значения характеров целы над } \mathbb{Z}}$$

$g^{|G|} - 1 = 0 \Rightarrow$ каждое собственное число оператора g цело над $\mathbb{Z}$

$$\lambda^{|G|} - 1 = 0$$

$\Downarrow$

$\operatorname{tr} g$ цел над $\mathbb{Z}$

$\rho: \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}(W)$ неприводимо.

$$1 = (\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\rho(g)^{-1}) \operatorname{tr}(\rho(g))$$

$$\frac{|G|}{\dim W} = \sum_g \underbrace{tr(\rho(g^{-1}))}_{} \, tr(\rho(g))/\dim W =$$

пусть c_k – значение $tr(\rho(g^{-1}))$ на классе k

$$= \sum_K c_k \frac{1}{\dim W} tr(\rho(g_k))$$

целые

$$g_k = \sum_{g\in K} g \in Z(\mathbb{Z}[G])$$

достаточно проверить, что $\underbrace{\frac{tr(\rho(g_k))}{\dim W}}_{}$

цел над $\mathbb{Z}$

$\forall h\in G \quad h g_k h^{-1} = g_k$ $\quad g_k$ – центральный элемент.

центральные элементы из $\mathbb{Z}[G]$ образуют конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль

$\rho(Z(\mathbb{Z}[G]))$ – это конечно-порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль в $End(W)$.

весь состоит из скалярных гомотетий

коэфф-ты гомотетий составляют конечно-порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{C}$.

$\Downarrow$ они все целы над $\mathbb{Z}$

$\frac{tr(\rho(g_k))}{\dim W}$ – это и есть коэфф-т гомотетии, которой действует g_k.

шаг 2 $A = Z(G)$ $\qquad \frac{[G:Z(G)]}{\dim W} = q$ цело над $\mathbb{Z}$.

надо проверить, что $1, q, q^2, \ldots$ лежат в конечно-порождённом $\mathbb{Z}$-подмодуле в $\mathbb{Q}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$

$\{1, q, q^2, \ldots\} = n^{-1}\mathbb{Z}$

Рассмотрим действие $\underbrace{G \times \ldots \times G}_{n} = G^n$

на $W^{\otimes n}$ по правилу:

$$(g_1,\dots,g_n)(w_1\otimes\dots\otimes w_n) :=$$

$$= g_1w_1\otimes g_2w_2\otimes\dots\otimes g_nw_n$$

$C\subset G^n$ $\quad C=\left\{(c_1,\dots,c_n)\ \middle|\ \begin{matrix} c_1\dots c_n=e \\ c_i\in Z(G)\end{matrix}\right\}$

Группа C действует на $W^{\otimes n}$ тривиально.

$$(c_1\dots c_n): w_1\otimes\dots\otimes w_n = \rho(c_1)\dots\rho(c_n)\times w_1\otimes\dots\otimes w_n$$

скаляры

$$\rho(c_1)\dots\rho(c_n)=\rho(c_1\dots c_n)=\rho(e)=1$$

реально действует группа G/C

представление неприводимо $\boxed{\text{упр.}}$

$G:W$ неприводимо $\Rightarrow G^n : W^{\otimes n}$ тоже неприводимо.

$\dfrac{|G^n/C|}{\dim W^{\otimes n}}$ – целое

$|C|=|Z(G)|^{n-1}$

$\dim W^{\otimes n}=(\dim W)^n$

$$\frac{|G|^n}{|Z(G)|^{n-1}\dim^n W} = \left(\frac{[G:Z(G)]}{\dim W}\right)^n \cdot |Z(G)| \in \mathbb{Z}$$

$$q^n \in |Z(G)|^{-1}\cdot \mathbb{Z}$$

Общий случай: $A \triangleleft G$ — любая нормальная абелева подгруппа.

$$\mathrm{res}_A W = \bigoplus_{\chi} W_\chi \leftarrow$$ изотипные компоненты ограничения ρ на $A \triangleleft G$.

$\chi : A \longrightarrow \mathbb{C}^*$

мультипликативный характер

$a(w) = \chi(a)\cdot w \quad \forall a \in A$
$\forall w \in W_\chi$.

Т.к. A нормальна, группа G действует на мультипликативных характерах

$$\chi : A \to \mathbb{C}^* \quad \circlearrowleft \quad \mathrm{Ad}_g$$

$$g : \chi \longrightarrow \chi^g = \chi \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$$

действие G на группе

$$A^\vee = \{\chi : A \to \mathbb{C}^*\}$$

$$\boxed{\chi^g(a) = \chi(g^{-1} a g)}$$

$$g : W_\chi \xrightarrow{\sim} W_{\chi^g}$$

$W_\chi \ni w: \quad a(w) = \chi(a) w$

$W_{\chi^g} \ni gw: \quad a g w = g \underbrace{g^{-1} a g}\, w = g \chi^g(a) w =$

$= \chi^g(a) g w$

ρ неприводимо $\Rightarrow$ действие G на компоненты W_χ транзитивно

$\Leftarrow$

$\boxed{\text{Все компоненты одной и той же размерности, и эта размерность делит } \dim W}$

1й случай: компонента одна, представление изотипно. $\rho(A) \subset Z(\rho(G))$

скалярные матрицы.

$[\rho(G) : \rho(A)] \;\vdots\; [\rho(G) : Z(G)] \;\vdots$

$\vdots$

$[G : A]$

$\underline{\dim W = \dim W_x}$

$$G \xrightarrow{\rho} \rho(G)$$

$$G/A \longrightarrow \rho(G)/\rho(A)$$

2й случай: компонент несколько. ?

W_x - одна из компонент. $H \subset G$ её стабилизатор.

всего имеется $[G:H]$ компонент и $H \subsetneqq G$ $\quad \underline{H \,\vdots\, W_x}$.

(если ρ неприводимо то действие H на W_x неприводимо упр.)

применим индукцию по $|G|$. По индукции

$$\boxed{H \rhd A} \Rightarrow \frac{[H:A]}{\dim W_x} \text{ целое}$$

$$\frac{[G:A]}{\dim W} = \frac{[H:A]\cdot[G:H]}{\dim W_x \cdot [G:H]} \text{ - целое}$$

Программа на следующий раз — расширения и строение комм. алгебр над полями

Теор! $A \subset B$ целое расширение колец (все $b \in B$ целы над A).

(1) Если B – поле, то и A – поле.

(2) Если A – поле и в B нет делителей нуля, то B – тоже поле.

Док-во! (1) $a \in A$ надо проверить, что $a^{-1} \in B$ лежит в A.

a^{-1} цел над A $\quad a^{-n} = a_1 a^{-n+1} + \dots + a_n \quad a_i \in A.$

$\swarrow \cdot a^{n-1}$

$$a^{-1} = a_1 + \dots + a_n a^{n-1} \in A.$$

(2) B – векторное пр-во над A.

$\forall b \quad \underline{1, b, b^2, \dots} \rightarrow$ порождают конечномерное подпр-во V

$b : \underline{V} \longrightarrow \underline{V} \quad v \longrightarrow bv$ это вложение т.к. b не делит нуля

$\swarrow$

b сюръективно $\exists v : bv = 1$

b – обратим.