Лекция 17 февраля (вторая половина)

$$X : \Delta_s \longrightarrow Sets$$

любое симпл. пр-во.

$\underline{\underline{X[n]}}$ — мн-во n-мерных симплексов пр-ва X.

$$\|$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\Delta_s^{op},\, Sets)}\left(h_{[n]}, X\right)$$

$$\|$$

уважающие триангуляцию отображения из стандартно триангулированного симплекса Δ^n в X.

Лемма Йонеды $\forall$ контравариантного функтора $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow Sets$ и любого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется естественный и по F и по A изоморфизм

$$\underline{\underline{F(A)}} \xrightarrow[\alpha_{A,F}]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op},\, Set)}\left(h_A, F\right)$$

↑ естественные преобразования

$A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2$ $\quad h_{A_1} \xrightarrow{\varphi_*} h_{A_2}$ $\quad h_A \to F$

естеств. по A.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(h_{A_2}, F) \arrow[r, "(\varphi_*)^*"] & \mathrm{Hom}(h_{A_1}, F) \\
F(A_2) \arrow[u, "f_{A_2}"] \arrow[r, "F\varphi"'] & F(A_1) \arrow[u, "f_{A_1}"']
\end{tikzcd}$$

$F \xrightarrow{g} G$

естественное по F.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(h_{A}, F) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Hom}(h_{A}, G) \\
F(A) \arrow[u, "f_{A,F}"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & G(A) \arrow[u, "f_{G,F}"']
\end{tikzcd}$$

Док-во леммы Йонеды: $\quad a \in F(A)$

любой элемент

надо построить естественное преобразование

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}}(h_A, F)$$

$$\shortparallel$$

$$\{f_X\}_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \qquad f_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)$$

$$\begin{tikzcd}
h_A(A)=\mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "h_A(\varphi)=\varphi^*"] & F(A) \arrow[d, "F\varphi"] \\
h_A(X)=\mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "\underline{\underline{f_X}}"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_A \arrow[r] \arrow[d] & a \\
\varphi &
\end{tikzcd}$$

правое умножение на φ

$\forall$ стрелки $\varphi : X \longrightarrow A$

$h_A(\varphi) : h_A(X) \longleftarrow h_A(A,A)$

$F(\varphi) : F(X) \longleftarrow F(A)$

надо чтобы они все были коммутативны $\underline{\underline{\forall X, \forall \varphi}}$

f_X однозначно задаётся значением $f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$.

$$f_X(\varphi) = F\varphi(a)$$

если задан элемент $\underline{a \in F(A)}$

то $\exists!$ естественное преобразование

$$f : h_A(X) \longrightarrow F(X)$$

x

такое что $f_A(\underset{\substack{\cap \\ h_A(A)}}{\mathrm{Id}_A}) = a.$

$$\boxed{f_X(\varphi) = F\varphi(a).}$$

надо проверить "полную" естественность по X

т.е. что $\forall \; X_1 \xrightarrow{\psi} X_2$ коммутативна

диаграмма

$$\begin{tikzcd}
h_A(X_1) \arrow[r, "f_{X_1}"] & F(X_1) \\
h_A(X_2) \arrow[u, "h_A\psi = \psi^*"] \arrow[r, "f_{X_2}"'] & F(X_2) \arrow[u, "F\psi"']
\end{tikzcd}$$

правое умножение на ψ. $\longrightarrow$

$\underset{\cup}{h_A(X_2)}$

$\xi : X_2 \to A$

вверх вправо $\xi \longmapsto \xi\psi \longrightarrow \underset{\cap}{\underbrace{F(\xi\psi)}}(a)$

вправо вверх $\xi \longmapsto \underset{\substack{\cap \\ F(A)}}{F(\xi)(a)} \longmapsto \underline{F\psi\, F\xi}(a)$

$F(\xi\psi)$

$F\psi \circ F\xi$

Лемма Йонеды

$$F(A) \longleftrightarrow \underset{Fun(\mathcal{C}^{op},\, Set)}{Hom}(h_A, F)$$

$$\underset{\underset{h_A(A)}{\cap}}{a = f_A(Id_A)} \longleftarrow\!\!\shortmid \{f_X\}$$

$$a \longmapsto \{f_X : \underset{\underset{\underset{h_A(X)}{\shortparallel}}{Hom(X,A)}}{\underset{\cap}{\varphi}} \mapsto \underbrace{F\varphi}_{Hom(FA,FX)}(a)\}$$

Лемма Йонеды II: $\forall$ ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \longrightarrow Sets$ и любого $A \in Ob\,\mathcal{C}$ $\exists$ естественный изоморфизм множеств по A и по F:

$$F(A) \simeq \underset{Fun(\mathcal{C},\, Sets)}{Hom}(h^A, F)$$

(Док-во — упражнение).

Функтор $F : \mathcal{C}^{opp} \to Sets$ называется представимым, если $\exists\, A \in Ob\,\mathcal{C}$:

$F \simeq h_A$ ($\exists$ естественный изом-м)

Функтор $F : \mathcal{C} \to Sets$ называется копредставимым, если $\exists\, A \in Ob\,\mathcal{C}$:

$F \simeq h^A$

объект A называется (ко)представляющим объектом функтора F.

$$\underset{Fun(\mathcal{C}, Set)}{\mathrm{Hom}}(h^A, h^B) \simeq \overset{= h^B(A) =}{\mathrm{Hom}(B,A)}$$

следствие леммы Йонеды II

в с.л.Й.II положить $F = h^B$

$$\mathrm{Hom}(h_A, h_B) \simeq \mathrm{Hom}(A,B)$$

$$\| $$

$$\simeq h_B(A)$$

$h^B \sim F \sim h^A \to h^B \sim h^A \Rightarrow \exists$ изом $B \xrightarrow{\sim} A$
$A \xrightarrow{\sim} A$

Представляющий объект определяется функтором однозначно с точностью до канонического изоморфизма

В любой категории можно пытаться реализовывать функториальные теоретико-множественные конструкции.

Пусть есть естественная операция над множествами: $\underline{\varphi(X_1, \dots, X_m)}$

$X_1, X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$

Пусть дан набор объектов $X_1, \dots, X_m \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

рассмотрим контравар. функтор

$$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow Sets$$

$$\tilde{\varphi} : Y \longrightarrow \varphi(\mathrm{Hom}(Y, X_1), \dots, \mathrm{Hom}(Y, X_n))$$

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}(Y, X_1) \times \mathrm{Hom}(Y, X_2)$$

результат применения операции φ к объектам $X_1, \dots, X_n$ — это объект, который представляет функтор $\tilde{\varphi}$.

$X_1 \times X_2$ — это такой объект, что

$$\boxed{\overbrace{\mathrm{Hom}(Y, X_1) \times \mathrm{Hom}(Y, X_2) \xrightarrow{\sim}}\; \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, \underline{X_1 \times X_2})}$$

$$Y = \overbrace{\underline{\underline{X_1 \times X_2}}} \qquad Id \in \mathrm{Hom}(X_1 \times X_2, X_1 \times X_2)$$

$$\cong$$

$$(\pi_1, \pi_2) \quad \mathrm{Hom}(X_1 \times X_2, X_1) \times \mathrm{Hom}(X_1 \times X_2, X_2)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X_1 & & X_2 \arrow[ll, bend right=70] \\
 & Y \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[uu, dashed, "\varphi\times\psi"] &
\end{tikzcd}$$

$\forall \varphi, \psi \ \exists! \ \varphi\times\psi : Y \to X_1\times X_2$: диаграмма коммутативна.

Определение ко-конструкции.

$\varphi(Set_1, \dots, Set_n)$

$\Downarrow$

если есть набор объектов $X_1, \dots, X_n$ и операция φ над множествами, то им сопоставляется ковар. функтор $\tilde{\tilde{\varphi}} : \mathcal{C} \to Set$

$$Y \mapsto \varphi(Hom(X_1, Y) \dots Hom(X_n, Y))$$

копредставляющий объект (если $\exists$) наз. ко-операцией φ над объектами $X_1, \dots, X_n$

Копроизведение $X_1 \otimes X_2$

$$\mathrm{Hom}(X_1 \otimes X_2, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X_1, Y) \times \mathrm{Hom}(X_2, Y)$$

прямое произв.
множеств.

$Y = X_1 \otimes X_2$

$$\mathrm{Id}_{X_1 \otimes X_2} = (i_1, i_2) \in \mathrm{Hom}(X_1, X_1 \otimes X_2) \times \mathrm{Hom}(X_2, X_1 \otimes X_2)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \otimes X_2 \arrow[dd, dashed, "\exists\,\psi\otimes\varphi"'] & \\
X_1 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X_2 \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

обернуть все стрелки в определении
произведение.

Что такое
$X_1 \otimes X_2$ в Sets?

Sets